N° d'ordre

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ

Troisième Cycle de Mécanique des Fluides

par

MAMADOU WATHE

SUJET

Contribution à l'étude des sillages chargés d'électricité

Soutenue le 28 Novembre 1972, devant la Commission d'Examen

M. SANTON	Président
M. FELICI	
M. CRAYA	Examinateurs
M. MOREAU	

GRENOBLE

N° d'ordre

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ

Troisième Cycle de Mécanique des Fluides

par

MAMADOU WATHE

SUJET

Contribution à l'étude des sillages chargés d'électricité

Soutenue le 28 Novembre 1972, devant la Commission d'Examen

M. SANTON	Président
M. FELICI	
M. CRAYA	Examinateurs
M. MOREAU	

GRENOBLE

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A mon pays

A mes parents

A ma femme

TABLE DES MATIERES

	Pages
TABLE DES NOTATIONS	IV
LISTE DES FIGURES	V
AVANT PROPOS	VIII
INTRODUCTION	X
CHAPITRE I - GENERALITES	1
1. Position du problème	1
2. Equations générales	2
3. Remarque sur la diffusion des ions	4
4. Le champ électrique appliqué	5
5. L'écoulement ambiant	6
CHAPITRE II - THEORIE LINEARISEE	7
1. Equation de la charge et du mouvement	7
2. Effets d'un champ électrique aligné	8
2-1. Distribution de la densité de charge	9
2-2. Distribution des vitesses	12
a. Rappel sur le sillage classique	12
b. Recherche de profils affines lorsque le champ aligné est non nul	13
2-3. Conclusion	17
3. Influence d'une composante transversale impaire	18
3-1. Equation de la charge	18
3-2. Equation du mouvement	19
3-3 Conclusion	24

CHAPITRE III - THEORIE MIXTE..... 43

1. Cas du champ aligné..... 44
1-1. Affinité approchée du profil réduit des charges..... 44
1-2. Etude des vitesses..... 47
1-3. Conclusion..... 51
2. Influence d'une composante transversale..... 51
2-1. Equation de la charge..... 52
2-2. Etude de vitesse..... 54
2-3. Conclusion..... 58

CHAPITRE IV - LE SILLAGE CHARGE DANS UNE CHAMBRE DE HAUTEUR CONSTANTE..... 68

1. Système d'équations..... 69
2. Conclusion..... 85

CONCLUSION..... 86
TABLEAU I..... 88
TABLEAU II..... 89
ANNEXE..... 104
BIBLIOGRAPHIE..... 110

TABLE DES NOTATIONS

ρ = masse volumique

μ = viscosité dynamique

ν = viscosité cinématique

K = mobilité des ions

ε = permittivité du liquide

$\mathcal{D}$ = coefficient de diffusion des ions

$\vec{V}$ = vecteur vitesse de composantes u, v, w.

U = vitesse extérieure

u_1 = vitesse déficitaire

$\vec{\nabla}$ = pseudo-vecteur de coordonées

p = pression hydrostatique

j = densité de courant

q = densité de charge

Φ = d. d. p. appliqué

φ = potentiel des charges

$\vec{E}$ = champ électrique appliqué

$\vec{e}$ = champ propre des charges

E_0, P_0 = scalaires

B = induction magnétique

M = rapport de la mobilité $\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^{1/2}$ à la mobilité réelle K

$Pe = \frac{Uh}{D}$ nombre de Peclet électrique

$Re = \frac{Uh}{\nu}$ nombre de Reynolds

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544309_0041

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Pages

Fig. I-1 : sillage chargé..... 1

Fig. I-2 : champ aligné..... 5

Fig. I-3 : champ transversal..... 5

CHAPITRE II - CHAMP ALIGNE

Fig. 1a : charge sur l'axe
..... 26

Fig. 1b : épaisseur de la zone chargée
..... 26

Fig. 2a : charge sur l'axe
..... 27

Fig. 2b : épaisseur de la zone chargée
..... 27

Fig. 3 : débit déficitaire relatif..... 28

Fig. 4 : profil réduit F'2..... 29

Fig. 5 : distribution des charges..... 30

Fig. 6a : vitesse déficitaire sur l'axe..... 31

Fig. 6b : Lieux des vitesses déficitaires nulles..... 31

Fig. 7a : distribution de la vitesse déficitaire ... 32

Fig. 7b : " " " " " ... 32

INFLUENCE D'UNE COMPOSANTE TRANSVERSALE IMPAIRE

Fig. 8a : épaisseur de la zone chargée 33

Fig. 8b : épaisseur de la sone chargée 33
Fig. 8c : loi de la charge sur l'axe..... 34
Fig. 9a : débit déficitaire 35
Fig. 9b : " " 35
Fig. 10 : profil réduit F'2 36
Fig. 11 : profils réduits F'1, F'2 et F'3 ... 37
Fig. 12a : vitesse déficitaire sur l'axe
($P^* = 0{,}0005$, N = 0 à 0,011)..... 38
Fig. 12b : vitesse déficitaire sur l'axe
(N = 0, $P^* = 0{,}0001$ à 0,0005)..... 38
Fig. 12c : vitesse déficitaire sur l'axe
(N = 0, $P^* = 0{,}0001$ à $-0{,}0009$)..... 39
Fig. 13a : vitesse déficitaire (N = 0,0001, $P^* = 0{,}0002$)... 40
Fig. 13b : " " (N = 0, $P^* = 0{,}0002$)... 40
Fig. 14a : " " (N = $-0{,}0001$, $P^* = -0{,}0002$).. 41
Fig. 14b : " " (N = 0, $P^* = -0{,}0002$).. 41
Fig. 15a : " " (N = $-0{,}003$, $P^* = -0{,}0002$).. 42
Fig. 15b : " " (N = 0,001, $P^* = -0{,}0002$).. 42

CHAPITRE III

Fig. 16 : comparaison des fonctions $\mathrm{erf}\left(\eta \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$ et $\mathrm{th}(\eta)$... 59
Fig. 17 : épaisseur de la zone chargée..... 60
Fig. 18 : potentiel des charges:..... 61
Fig. 19 : comparaison entre l'épaisseur de la couche de
diffusion et l'épaisseur de la couche de mobilité 62
Fig. 20 : distribution de la densité de charge..... 63
Fig. 21 : champ aligné : vitesse excédentaire sur l'axe
dans la zone du jet..... 64
Fig. 22 : comparaison des fonctions $(\eta F')'$ et $\left(F' - \frac{H_1}{\omega_1}\right)$ 65
Fig. 23a : influence de Ey:vitesse excédentaire sur l'axe
dans la zone du jet ($P^* = 0{,}001$ et N = 1 à 7)... 66
Fig. 23b : influence de Ey : vitesse excédentaire sur l'axe
dans la zone du jet (N = 1, $P^* = 0{,}0001$ à 0,1).. 66
Fig. 24 : comparaison des fonctions $(\eta F')'$, $\left(F' - \frac{H_1}{\omega_1}\right)$ et $2\left(F' - \frac{H_3}{\omega_2}\right)$. 67

CHAPITRE IV

Fig. 25a :..... 74

Fig. 25b :..... 81
Fig. 26 : sillage confiné non chargé L(1/R)..... 90
Fig. 27a : " " " " L(X)..... 91
Fig. 27b : " " " " R(X)..... 91
Fig. 28a : sillage chargé confiné L(X) (P = 0,0001,
N = -0,005 à 0,008) 92
Fig. 28b : " " " R(X) " " " 92
Fig. 29a : " " " L(X) (P = 0,01
N = -0,005 à 0,008) 93
Fig. 29b : " " " R(X) " " " 93
Fig. 30a : " " " L(X) (P = 0,01
N = 0 à 0,028).... 94
Fig. 30b : " " " R(X) " " " 94
Fig. 31 : Influence du champ aligné sur l'amortissement
de la vitesse déficitaire..... 95
Fig. 32a : sillage chargé confiné L(X) (N = 0 P = 0 à 0,04) 96
Fig. 32b : " " " R(X) " " " 96
Fig. 33a : " " " L(X) (N = 0,005
P = 0 à 0,04).... 97
Fig. 33b : " " " R(X) " " " 97
Fig. 34a : " " " L(X) (N = 0 P = 0 à 0,14) 98
Fig. 34b : " " " R(X) " " " 98
Fig. 35a : " " " L(X) (N = 0,005
P = 0 à 0,14).... 99
Fig. 35b : " " " R(X) " " ".... 99
Fig. 36 influence de l'injection des charges sur l'amortissement de la vitesse déficitaire..... 100
Fig. 37a : sillage chargé confiné Z(X) (N = 0 P
P = 0,01 à 0,1)... 101
Fig. 37b : " " " Y(X) " " " ... 101
Fig. 38a : " " " Z(X) (N = 0,01
P = 0,04 à 1)..... 102
Fig. 38b : " " " Y(X) " " " 102
Fig. 39a : " " " Z(X) (N = 0,1
P = 0,005 à 0,1).. 103
Fig. 39b : " " " Y(X) " " " .. 103

AVANT-PROPOS

Les travaux résumés dans le présent mémoire ont été accomplis aux Laboratoires de Mécanique des Fluides de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, au cours d'un séjour effectué de septembre 1969 à novembre 1972.

Je prie Monsieur le Professeur Santon, d'agréer mes respectueux remerciements, pour m'avoir témoigné beaucoup de bienveillance, et pour m'avoir fait le grand honneur de présider mon jury de thèse.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Felici, Directeur du Laboratoire d'Electrostatique du C. N. R. S., qui a bien voulu s'intéresser à mes travaux et faire partie de mon jury de thèse.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur CRAYA, Directeur du Laboratoire Associé au C. N. R. S., Responsable du Groupe de recherches sur la "Dynamique des Liquides et des Gaz", qui a bien voulu m'accepter dans son équipe de recherches. Que Monsieur Craya soit assuré de ma sincère reconnaissance pour m'avoir prodigué des connaissances précieuses en Mécanique des fluides et pour m'avoir toujours témoigné beaucoup de sympathie. Monsieur Craya me fait le grand honneur de faire partie de mon jury de thèse.

Je voudrais exprimer à Monsieur Moreau, Maître de Conférences à l'Université de Grenoble, toute ma reconnaissance, pour avoir dirigé ma thèse. Je lui dois l'idée initiale de cette recherche, dont il a été tout au long de mon travail, le guide dynamique et le conseiller amical. Je le remercie tout particulièrement pour avoir su me faire profiter de ses connaissances étendues sur le sujet, et pour m'avoir soutenu efficacement pendant tout mon séjour à Grenoble.

Que Monsieur Curtet, Maître de Recherches au C. N. R. S. soit assuré de ma sincère reconnaissance pour les échanges de vues très fructueux que nous avons eus ensembles et pour ses encouragements.

Je remercie Monsieur Lespinard, Maître de Conférences à L'Université de Grenoble, et Directeur de l'Institut de Mécanique de Grenoble, pour son appui matériel qui m'a permis de terminer ce travail.

J'adresse mes remerciements sincères aux chercheurs du Laboratoire d'Electrostatique du C. N. R. S. et plus particulièrement à Atten qui m'a initié à la programmation, à Tobazeon et à Lacroix, pour leurs conseils précieux et leur grande cordialité.

Mes remerciements s'adressent également à MM. Hopfinger et Binder chargés de recherches au C. N. R. S. pour leurs critiques constructives et leurs conseils amicaux.

J'adresse aussi mes remerciements à MM. Lagarde et Rabatel qui m'ont aidé dans l'utilisation de l'ordinateur IBM 1132.

Je remercie particulièrement Monsieur Brault, Chef du Service Reprographie, ainsi que M. Perroux, M. Diot et M. Jourdan qui ont pris en charge la réalisation matérielle du mémoire.

Je ne saurais oublier le concours précieux que m'ont apporté toutes les personnes qui ont facilité mon séjour aux Laboratoires et en particulier Monsieur Choisy, Secrétaire de Direction, Madame Giroutru, Madame Faure qui a assuré avec bonne humeur, une grande partie de la frappe de ce mémoire, commencée par Madame Lebre, M. Lapierre qui a participé à l'élaboration des figures de ce mémoire, et Mademoiselle Saunier.

Je voudrais enfin adresser mes remerciements à tous les chercheurs et techniciens des Laboratoires qui m'ont fait bénéficier de nombreuses discussions et pour l'ambiance de travail que j'ai trouvée auprès d'eux, en particulier MM. Alemany, Barbet, Didelle, Favre-Marinet, Jodelet, Suberville, Mistrulli, Rigoletti, Neuhaus, Khanji et Zinebi.

I N T R O D U C T I O N

Les études récentes d'Electrohydrodynamique (E. H. D.), notamment celles conduites à Grenoble (FELICI (6), ATTEN et MOREAU(23), HOPFINGER et GOSSE (13)), ont été essentiellement orientées vers l'étude des mécanismes de conduction des liquides diélectriques. Leur objectif était d'abord de prouver l'instabilité de ces liquides lorsqu'ils sont chargés d'électricité, puis d'analyser la contribution du mouvement au transport de la charge électrique.

A la suite de ces études de convection naturelle, où le mouvement du fluide prend naissance de lui-même, nous avons abordé un problème où, au contraire, le mouvement du fluide est forcé. La question fondamentale est toujours celle de l'entraînement des charges par l'écoulement, mais la structure de l'écoulement réorganisé par les forces de Coulomb présente elle aussi un grand intérêt. Comme en convection forcée thermique, ces effets se font sentir essentiellement dans des couches limites, soit au voisinage immédiat de la paroi injectrice, soit au contraire loin de toute paroi comme dans les jets et les sillages. Les études expérimentales antérieures de TOBAZEON (14) sur le sillage d'un fil chargé, les résultats curieux et incompris qu'elles avaient mis en évidence, ont amené Monsieur MOREAU, Maître de Conférences, à nous suggérer ce sujet comme premier problème de convection forcée électrique. L'affinité rigoureuse ou approchée du profil de vitesse dans les écoulements de ce type permet souvent d'en faire une théorie assez bonne.

Nous avons cherché à isoler les mécanismes les plus nets en situant chacun d'eux dans un contexte assez simple. Le cas d'un champ électrique aligné avec l'écoulement permet de mettre en évidence la minceur de la zone chargée lorsqu'elle est soumise à la seule diffusion des ions et l'accélération correspondante du sillage. L'influence de la mobilité des ions et de leur vitesse de migration transversale apparaît lorsque l'on ajoute une composante transversale au champ

appliqué. Et, si la charge d'espace est assez grande, son propre champ électrique devient important par rapport au champ appliqué ; les forces de répulsion des ions de même signe entraînent alors un élargissement beaucoup plus rapide du sillage. Finalement, pour situer ces divers effets dans un contexte réaliste, il faut bien considérer un sillage confiné dans une chambre de largeur finie, où le gradient de pression longitudinal et la conservation du débit modifient encore de manière importante le champ de vitesse et les lois de distribution de la charge.

CHAPITRE I

GENERALITES

1 - Position du problème.

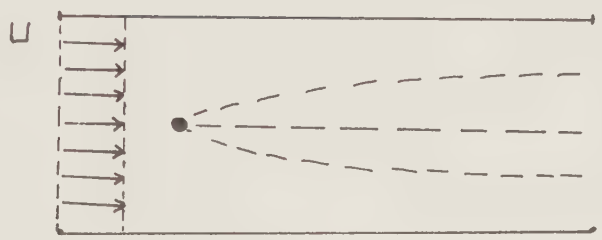


Fig 1-1 : Sillage chargé

Le schéma théorique envisagé est celui d'un sillage chargé, créé par un dispositif injectant des ions de même nature dans l'axe de l'écoulement d'un fluide incompressible. Des éléctrodes, convenablement disposées, créent un champ électrique appliqué.

Nous ne considérons dans cette étude, que la zone assez éloignée du dispositif d'injection, nous ne nous préoccupons pas des couches limites situées de chaque côté du dispositif, ni de la zone de transition entre ces couches limites et le sillage proprement dit. Cet écoulement est supposé plan et permanent.

En outre le fluide est supposé parfaitement isolant. Comme ATTEN et MOREAU [1], nous entendons par là que le fluide n'a aucune possibilité de faire apparaître, de créer ou d'absorber des charges électriques, la densité de charge spatiale provenant uniquement du dispositif d'injection. Dans un tel fluide le courant électrique est très faible et le champ magnétique négligeable ; en conséquence

le champ électrique appliqué est irrotationnel.

Enfin, nous supposons invariantes les diverses constantes physiques du fluide.

2 - Equations générales

Pour former le système général des équations de l'E.H.D., il faut ajouter aux équations de continuité, aux équations de NAVIER-STOKES et aux équations de MAXWELL :

$$\begin{cases} \nabla.\vec{v} = 0 \\ (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{v} + \frac{q\vec{E}_t}{\rho} + \frac{1}{\rho}\vec{j}\wedge\vec{B} \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E}_t = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}.\vec{E}_t = \frac{q}{\varepsilon} \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\vec{E}_t \\ \vec{\nabla}.\vec{H} = 0 \end{cases} \qquad (I-2-1)$$

l'expression de la densité de courant :

$$\vec{j} = q(K\vec{E}_t + \vec{v}) - D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,q. \qquad (I-2-2)$$

Cette expression résulte à la fois des mécanismes de migration des ions sous l'effet de leur mobilité K dans le champ électrique E_t (leur vitesse est alors KE_t+V) et de diffusion de la charge électrique.

Dans le cadre de nos hypothèses, le système se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \nabla.\vec{v} = 0 \\ (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{\rho}q\vec{E}_t \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E}_t = 0 \\ \vec{\nabla}.\vec{E}_t = \frac{q}{\varepsilon} \\ (\vec{v}.\vec{\nabla})q = D\nabla^2 q - K\vec{\nabla}(q\vec{E}_t) \end{cases} \qquad (I-2-3)$$

Le champ électrique total E_t est la somme du champ propre des charges $\vec{e}$ et du champ appliqué $\vec{E}$. Ce dernier est à rotationnel et divergence nuls, il dérive donc d'un potentiel Φ qui satisfait à l'équation de LAPLACE. Le champ propre des charges, également irrotationnel, dérive aussi d'un potentiel φ , mais celui-ci est relié à la densité de charge d'espace par l'équation de Poisson. On a :

$$\begin{cases} \vec{E}_t = -\overrightarrow{grad}\,(\Phi + \varphi) \\ \nabla^2\Phi = 0 \\ q + \varepsilon\nabla^2\varphi = 0 \end{cases} \qquad (I-2-4)$$

Une autre approximation primordiale, par la simplification qu'elle apporte aux systèmes d'équations, est l'approximation de la couche limite. Pour cela on néglige la composante v de la vitesse devant la composante u et les dérivées partielles par rapport à x devant les dérivées partielles par rapport à y. En coordonnées cartésiennes, le système (I-2-3) devient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (I-2-5) \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{q}{\rho}\frac{\partial \Phi_t}{\partial x} & (I-2-6) \\ \frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi_t}{\partial y} = 0 & (I-2-7) \\ q + \varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 & (I-2-8) \\ u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} = D\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + K\frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial \Phi_t}{\partial y}\right) & (I-2-9) \end{cases}$$

Il est intéressant de remarquer que le gradient transversal de pression $\frac{\partial p}{\partial y}$ n'est pas nul comme dans le sillage classique, mais qu'il dépend de la composante transversale de la force de Coulomb. A l'extérieur du sillage le gradient longitudinal de pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ est indépendant de tout champ électrique et suit la loi de Bernoulli. Par contre dans le sillage lui-même ce gradient dépend de l'injection des charges et du champ appliqué.

Il est préférable pour la suite d'éliminer les termes de pression. On obtient alors en additionnant les dérivées de (I-2-6) par rapport à y et de (I-2-7) par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\nu\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial \Phi_E}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial \Phi_E}{\partial x}\right) \qquad (I-2-10)$$

C'est l'équation du tourbillon $\vec{\omega}\left(0;0;\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ qui traduit l'équilibre entre la convection et la diffusion du tourbillon ; le troisième terme d'origine électrique est une source supplémentaire de tourbillon.

A ces équations, il faut adjoindre les conditions aux limites qui sont :

- pour les vitesses :

$$\begin{cases} u(y=\infty)=U \\ v(y=0)=0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=0 \end{cases} \qquad (I-2-11)$$

- pour les charges :

$$\begin{cases} q(y=\infty)=0 \\ \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_{y=0}=0 \end{cases} \qquad (I-2-12)$$

3 - Remarque sur la diffusion des ions.

Un examen des ordres de grandeur respectifs des termes de diffusion et de migration des ions dans l'expression (I-2-9) de la densité de courant montre que le premier est en général extrêmement petit devant le second et pourrait suggérer de négliger le terme $D\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}$. En fait ce terme est essentiel au moins dans le cas particulier où l'injection est faible ; le champ propre des charges est alors très faible, les forces de répulsion des ions sont trop faibles pour les écarter les uns des autres et la diffusion est le seul mécanisme qui règle l'écartement de la zone

chargée au sein du sillage. Dans les autres cas, où le terme de diffusion est effectivement très faible et n'a aucun rôle essentiel, on constate qu'il n'amène aucune contrainte supplémentaire ; au contraire son analogie avec le terme de viscosité $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ peut présenter certains avantages dans le déroulement des calculs. Nous avons donc préféré conserver ce terme dans tous les cas envisagés.

4 - Le champ électrique appliqué

Nous considérons par la suite deux types de distributions du champ électrique appliqué choisis en raison d'une part de leur simplicité, d'autre part de la possibilité de les réaliser en labotatoire. Bien entendu ces deux distributions doivent dériver d'un potentiel harmonique. La première (Fig.I-2) correspond à un champ uniforme aligné avec l'écoulement ambiant (par exemple créé par d'éventuelles grilles-électrodes situées loin à l'amont et loin à l'aval). La seconde (Fig.I- 3) comporte en plus du champ aligné une composante transversale impaire qui aura pour effet d'accroître la largeur de la zone chargée beaucoup plus que la diffusion des ions à elle seule ne pourrait le faire (cette composante transversale peut être une approximation de l'influence d'électrodes parallèles à l'écoulement portées à un potentiel négatif).

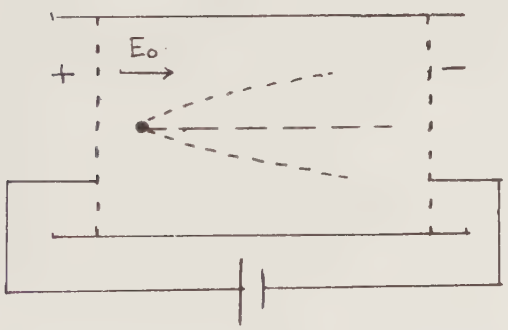


Fig.I-2 : Champ aligné

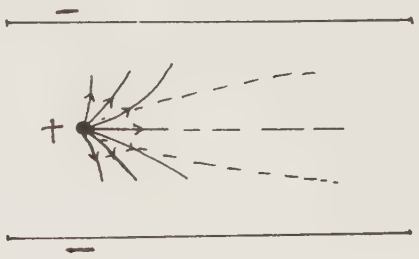


Fig.I-3 : Composante transversale

Ces deux distributions simples peuvent être regroupées dans les expressions :

$$\begin{cases} E_x = E_o - P_o x \\ E_y = P_o y \end{cases} \qquad (I-4-1)$$

ou encore :

$$\Phi(x,y) = -E_o x + \frac{P_o}{2}(x^2 - y^2) \qquad (I-4-2)$$

le scalaire E_o caractérisant l'importance du champ aligné et P_o celle de la composante transversale.

5 - L'écoulement ambiant

Nous étudions d'abord le sillage dans un écoulement ambiant uniforme, de façon à mettre en lumière, dans les conditions les plus simples, les effets des divers paramètres électriques : champ aligné E_o, composante transversale P_o, champ propre des charges, diffusion des ions D, mobilités des ions K ... Nous nous limitons à l'étude d'un éventuel régime laminaire régi par les équations (I-2-5) à (I-2-9). L'étude d'un régime turbulent exigerait une hypothèse sur le frottement turbulent (par exemple l'hypothèse de Boussinesq) et ne conduirait pas, dans ces conditions volontairement simples, à des résultats très originaux ou très significatifs.

Par contre, dans le dernier chapitre nous tentons d'analyser le comportement d'un sillage dans des conditions proches de l'expérience ou, tout au moins, réalisables en laboratoire. L'écoulement ambiant est alors confiné dans une chambre de hauteur constante et le sillage n'est plus supposé laminaire. La méthode utilisée est plus globale, elle dérive de la théorie des jets confinés de Craya et Curtet[2].

CHAPITRE II

THEORIE LINEARISEE

1 - Equations de la charge et du mouvement.

Introduisons la vitesse déficitaire :

$$u_1(x,y) = U - u(x,y)$$

(L'étude d'un jet chargé d'électricité serait tout à fait analogue, la vitesse étant excédentaire au lieu d'être déficitaire). Dans une première étape nous supposons que la vitesse extérieure U est constante et nous ne considérons que les régions assez éloignées en aval où la vitesse déficitaire est faible devant la vitesse extérieure. Nous supposons également que la charge spatiale est assez faible de telle manière que son propre champ électrique soit faible et négligeable devant le champ appliqué. En négligeant les termes du second ordre dans les équations (I-2-9) et (I-2-10) on obtient :

$$U \frac{\partial q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - K \frac{\partial}{\partial y}(qE_y) \qquad (II-1-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) = \nu \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial q}{\partial x} E_y - \frac{\partial q}{\partial y} E_x\right) \qquad (II-1-2)$$

Ces équations sont linéaires et découplées. Une fois l'équation des charges (II-1-1) résolue, les termes électriques de l'équation du mouvement seront entièrement déterminés.

Par ailleurs on note que l'équation des charges est bien du premier ordre si la diffusion est négligée, du second ordre dans le cas contraire. La relation d'Einstein :

$$\frac{D}{K} = \frac{RT}{F} \approx \frac{1}{40} \text{ Volts}$$

à la température ordinaire où R est la constante des gaz parfaits, T la température absolue et F le Faraday, permet d'évaluer la valeur du coefficient de diffusion D lorsque la mobilité est connue. Si D est négligé, ATTEN[3] montre que le problème électrique est bien posé lorsque la densité de charge initiale est connue. Mais celle-ci étant difficile à évaluer on peut la fixer avec un changement de variable et un choix de grandeurs de référence convenables.

Il faut remarquer aussi que la diffusion n'est pas négligeable lorsqu'il y a de fortes hétérogénéités ou des discontinuités dans la distribution de densité de charge, cf. FELICI [4].

Dans tous les cas un résultat important demeure : la charge totale par unité de longueur du sillage $\left(\int_0^\infty q\,dy\right)$ demeure constante.

2 - Effets d'un champ électrique aligné.

En annulant le scalaire P_o dans (I-4-1) les composantes du champ appliqué deviennent :

$$\begin{cases} E_x = E_o \\ E_y = 0 \end{cases} \qquad (II-2-1)$$

Les équations (II-1-1) et (II-1-2) deviennent alors :

$$U \frac{\partial q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \qquad (II-2-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U \frac{\partial u_i}{\partial x}\right) = \nu \frac{\partial^3 u_i}{\partial y^3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial y} E_o \qquad (II-2-3)$$

Le gradient transversal $\frac{\partial P}{\partial y}$ de pression est nul comme dans le sillage classique. Et le terme de mobilité disparait de l'équation de conservation de la charge qui ne dépend plus que de la diffusion.

L'équation (II-2-3) s'intégre par rapport à y et les conditions à l'extérieur du sillage montrent que la constante d'intégration est nulle.

On retrouve alors l'équation du mouvement :

$$U \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{q}{\rho} E_0 \qquad (II-2-4)$$

Les problèmes de ce type ont souvent des solutions à profils affines ; cherchons donc des solutions telles que les profils réduits de charge $\frac{q(x,y)}{q_0(x)}$ et de vitesse $\frac{u_1(x,y)}{u_0(x)}$ se ramènent chacun à une courbe unique, et posons :

$$\begin{cases} q(x,y) = q_0(x)\, g(\eta) \\ u_1(x,y) = u_0(x)\, f(\zeta) \end{cases} \qquad (II-2-5)$$

avec :

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad , \quad \zeta = \frac{y}{\beta(x)} \qquad (II-2-6)$$

Introduisons les fonctions $G(\eta)$ et $F(\zeta)$ primitives de $g(\eta)$ et de $f(\zeta)$:

$$\begin{cases} G(\eta) = \int_0^\eta g(\eta)\, d\eta \\ F(\zeta) = \int_0^\zeta f(\zeta)\, d\zeta \end{cases} \qquad (II-2-7)$$

Les conditions aux limites relatives à $G(\eta)$ et $F(\zeta)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} G(0) = 0 \\ G'(\infty) = 0 \\ G''(0) = 0 \end{cases} \qquad (II-2-8)$$

et :

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F'(\infty) = 0 \\ F''(0) = 0 \end{cases} \qquad (II-2-9)$$

2-1. Distribution de la densité de charge

L'équation de la conservation de la charge (II-2-2) devient en variables réduites :

$$\frac{q_0' \delta}{q_0 \delta'} G' - \eta G'' - \frac{D}{U \delta \delta'} G''' = 0 \qquad (II-2-10)$$

ou bien :

$$\frac{(q_0\delta)'}{q_0\delta'}\,G' - (\eta G')' - \frac{D}{U\delta\delta'}\,G''' = 0 \qquad (II-2-11)$$

avec :

$$\eta G'' = (\eta G') - G' \qquad (II-2-12)$$

On peut aisément montrer que les coefficients $\frac{(q_0\delta)'}{q_0\delta'}$ et $\frac{D}{U\delta\delta'}$ sont constants. Intégrons d'abord l'équation (II-2-11) en η de 0 à ∞ ; il vient en tenant compte des conditions aux limites :

$$\frac{(q_0\delta)'}{q_0\delta'}\,G(\infty) = 0 \qquad (II-2-13)$$

égalité qui exprime l'invariance de la charge totale dans une section droite. Posons :

$$q_0\delta = Q_0 \qquad (II-2-14)$$

Il reste de (II-2-11) :

$$(\eta G')' + \frac{D}{U\delta\delta'}\,G''' = 0 \qquad (II-2-15)$$

Le coefficient $\frac{D}{U\delta\delta'}$, seul à pouvoir éventuellement varier avec x ne peut être que constant; notons le :

$$\frac{D}{U\delta\delta'} = a \qquad (II-2-16)$$

et intégrant une fois en η (II-2-15) la constante d'intégration s'annule ; on obtient :

$$\eta G' + aG'' = 0 \qquad (II-2-17)$$

Enfin (II-2-17) intégrée donne le profil réduit des charges :

$$G'(\eta) = G'(o)\,e^{-\eta^2/2a} \qquad (II-2-18)$$

Choisissant les normalisations :

$$\begin{cases} G'(0) = 1 \\ G(\infty) = 1 \end{cases} \qquad (II-2-19)$$

on trouve :

$$a = \frac{2}{\pi} \qquad (II-2-20)$$

Le profil réduit des charges s'écrit alors :

$$G'(\eta) = e^{-\frac{\pi}{4}\eta^2} \qquad (II-2-21)$$

et sa primitive est :

$$G(\eta) = erf\left(\eta\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \qquad (II-2-22)$$

L'épaisseur $\delta(x)$ de la couche chargée se déduit de (II-2-16), on obtient :

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\pi D}{U}x} \qquad (II-2-23)$$

et par la suite (II-2-14) donne la loi de charge sur l'axe :

$$q_0(x) = \frac{Q_0}{\sqrt{\frac{\pi D}{U}x}} \qquad (II-2-24)$$

Les lois de $\delta(x)$ et $q_0(x)$ s'expriment en variables adimensionnelles lorsque l'on se donne une longueur de référence h et la charge à travers une section Q_0 ; soient :

$$\frac{\delta(x)}{h} = \sqrt{\frac{qD}{Uh}}\left(\frac{x}{h}\right)^{1/2}$$

$$\frac{q_0(x)h}{Q_0} = \sqrt{\frac{Uh}{\pi D}}\left(\frac{x}{h}\right)^{-1/2} \qquad (II-2-25)$$

La distribution de la densité de charge s'écrit donc :

$$\frac{q(x,y)h}{Q_0} = \sqrt{\frac{Uh}{\pi D}}\left(\frac{x}{h}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{y^2}{x}\frac{U}{D}\right) \qquad (II-2-26)$$

Les échelles $\delta(x), q_0(x)$ et la densité de charge $q(x,y)$ ne dépendent que du nombre de Peclet électrique $\frac{Uh}{D}$. (Figures 1a, 1b, 2a, 2b). Ce nombre joue dans l'équation de la conservation de la charge, un rôle analogue à celui du nombre de Péclet dans l'équation de l'énergie. Le nombre de Peclet électrique étant de l'ordre de 10^6 à 10^8, on doit s'attendre à ce que l'épaisseur de la zone chargée soit extrêmement faible au centre du sillage.

2-2. Distribution des vitesses

a) Rappel sur le sillage classique

Lorsque le champ électrique appliqué est nul , (II-2-4) se réduit à l'équation très connue du sillage classique.

$$U\frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \qquad (II-2-27)$$

On observe une analogie frappante entre l'équation (II-2-2) de la conservation de la charge et cette dernière équation qui s'écrit en variable réduite :

$$\frac{(u_0\beta)'}{u_0\beta'} F - (\zeta F')' - \frac{\nu}{U\beta\beta'} F''' = 0 \qquad (II-2-28)$$

Un raisonnement identique à celui du paragraphe précèdent conduit aux résultats suivants :

$$F'(\zeta) = e^{-\frac{\pi}{4}\zeta^2}$$

$$u_0\beta = c^{te} \qquad (II-2-29)$$

$$\beta(x) = \sqrt{\frac{\pi\nu}{U}x}$$

Il apparait que le débit déficitaire est constant ; avant de le déterminer, il semble nécessaire de faire quelques remarques.

Il est connu que dans un jet flux de quantité de mouvement est constant :

$$M = \rho\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = c^{te}$$

Mais dans un sillage il existe une relation directe entre le flux de quantité de mouvement déficitaire et l'effort $\mathcal{F}$ exercé par le fluide sur le corps. En effet le théorème des quantités de mouvement appliqué à une surface de contrôle contenant le corps

(le dispositif est supposé cylindrique de longueur ℓ) montre que :

$$\mathcal{F} = \rho \ell \int_{-\infty}^{+\infty} u\,(U-u)\,dy \qquad (II-2-30)$$

Soit :

$$\mathcal{F} = 2\rho \ell\, U\, u_o \beta \qquad (II-2-31)$$

D'autre part cet effort s'écrit lorsque d est le diamètre du corps cylindrique :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\, C_R\, \ell\, d\, \rho\, U^2 \qquad (II-2-32)$$

où C_R est le coefficient de résistance.

(Pour un corps cylindrique lisse, C_R est de l'ordre de 1,2 pour des nombres de Reynolds compris entre 10^2 et 10^5).

En identifiant les expressions (II-2-31) et (II-2-32) on obtient :

$$u_o \beta = \frac{C_R}{4}\, U d \qquad (II-2-33)$$

et ensuite on retrouve les résultats analogues à ceux obtenus par SCHLICHTING [5.]

$$\frac{\beta(x)}{h} = \sqrt{\frac{\pi \nu}{U h}} \left(\frac{x}{h}\right)^{1/2}$$

$$\frac{u_o(x)}{U} = \frac{C_R d}{4h} \sqrt{\frac{Uh}{\pi \nu}} \left(\frac{x}{h}\right)^{-1/2} \qquad (II-2-34)$$

$$\frac{u_1(x,y)}{U} = \frac{C_R d}{4h} \sqrt{\frac{Uh}{\pi \nu}} \left(\frac{x}{h}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{4} \frac{y^2}{x} \frac{U}{\nu}\right)$$

On remarque que ces expressions ne dépendent que du nombre de Reynolds.

b) Recherche de profils affines lorsque le champ aligné est non nul.

Appliquons le théorème des quantités de mouvement c'est à dire intégrons en y de 0 à ∞ l'équation du mouvement (II-2-4). Il vient :

$$U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u_1 dy = -\frac{E_0 Q_0}{\rho} \qquad (II-2-35)$$

ou bien en intégrant par rapport à x :

$$U \int_0^\infty u_1 dy = c^{te} - \frac{E_0 Q_0}{\rho} x \qquad (II-2-36)$$

ou encore :

$$R = \frac{\int_0^\infty u_1 dy}{U h} = m\left(1 - \frac{N}{m} X\right)$$

avec :

$$\begin{cases} m = \frac{C_R}{4} \frac{d}{h} \quad , X = \frac{x}{h} \\ N = \frac{E_0 Q_0}{\rho U^2} \end{cases} \qquad (II-2-37)$$

Le débit déficitaire n'est plus constant comme dans le cas du sillage classique Fig. (3).

L'expression (II-2-3b) nous suggère, du fait même de la linéarité de l'équation du mouvement (II-2-4), de chercher une solution complète de la forme :

$$u_1(x,y) = u_{01}(x) f_1(\zeta) + u_{02}(x) f_2(\zeta) \qquad (II-2-38)$$

où

$$\begin{cases} u_{01}(x) = \dfrac{U d C_R}{4 \int_0^\infty f_1(\zeta) d\zeta} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi \nu}{U}}} x^{-1/2} \qquad (II-2-39) \\ u_{02}(x) = -\dfrac{E_0 Q_0}{\rho U \int_0^\infty f_2(\zeta) d\zeta} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi \nu}{U}}} x^{1/2} \qquad (II-2-40) \end{cases}$$

La vitesse déficitaire sur l'axe :

$$u_1(x,0) = u_{01}(x) f_1(0) + u_{02}(x) f_2(0) \qquad (II-2-41)$$

se compose du terme déjà trouvé en $x^{-1/2}$ du sillage classique et d'un terme nouveau en $x^{1/2}$ qui dépend du champ électrique aligné.

Avant d'établir les équations différentielles des profils réduits $f_1(\zeta)$ et $f_2(\zeta)$, remarquons que le second membre de l'équation du mouvement dépend de la densité de charge q, donc de la variable η. Cette variable est reliée à ζ par :

$$\eta = \frac{\beta(x)}{\delta(x)}\,\zeta$$

Soit :

$$\eta = \sqrt{\frac{\nu}{D}}\,\zeta \qquad (II-2-42)$$

Le rapport de l'épaisseur de la couche limite $\beta(x)$ à l'épaisseur de la couche chargée $\delta(x)$ est égal à la racine carrée du nombre de Schmidt $\frac{\nu}{D}$.
Ce nombre étant généralement grand ($\frac{\nu}{D} \simeq 4000$ à 300°K pour le nitrobenzène), la diffusion ionique n'est sensible que dans une couche mince au sein du sillage.

Cela dit, posons comme plus haut :

$$F_i(\zeta) = \int_0^{\zeta} f_i(\zeta)\,d\zeta \qquad (II-2-43)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} F_i(0) = 0 \\ F'_i(\infty) = 0 \\ F''_i(0) = 0 \end{cases} \qquad (II-2-44)$$

Choisissant les normalisations :

$$F_i(\infty) = 1 \qquad (II-2-45)$$

l'équation du mouvement (II-2-4) s'écrit alors à l'aide de ces nouvelles fonctions :

$$\left(F_1' + \zeta F_1'' + \frac{2}{\pi} F_1'''\right) \frac{U\,dC_0}{8\sqrt{\frac{\pi\nu}{U}}}\, x^{-3/2} + \left(F_2' - \zeta F_2'' - \frac{2}{\pi} F_2''' - 2\sqrt{\frac{\nu}{D}}\, e^{-\frac{\pi}{4}\frac{\nu}{D}\zeta^2}\right) \frac{E_0 Q_0}{2\rho U\sqrt{\frac{\pi\nu}{U}}}\, x^{-1/2} = 0$$

$$(II-2-46)$$

Ces deux groupes de termes doivent s'annuler simultanément et on obtient deux équations séparées, chacune étant à coefficients constants.

$$\begin{cases} F_1' + \zeta F_1'' + \frac{2}{\pi} F_1''' = 0 & (II-2-47) \\ F_2' - \zeta F_2'' - \frac{2}{\pi} F_2''' = 2\sqrt{\frac{\nu}{D}}\, e^{-\frac{\pi}{4}\frac{\nu}{D}\zeta^2} & (II-2-48) \end{cases}$$

La première équation (II-2-46) du sillage classique a été résolue plus haut (II-2-27). Quant à la seconde (II-2-47), qui correspond au champ aligné, elle donne :

- lorsque le nombre de Schmidt est égal à l'unité :

$$F_2'(\zeta) = e^{-\frac{\pi}{4}\zeta^2} \qquad (II-2-49)$$

- et lorsque le nombre de Schmidt est différent de l'unité :

$$F_2'(\zeta) = \frac{2\sqrt{\frac{\nu}{D}}}{\frac{\nu}{D}-1}\left\{\left(\sqrt{\frac{\nu}{D}}\, e^{-\frac{\pi}{4}\zeta^2} - e^{-\frac{\pi}{4}\frac{\nu}{D}\zeta^2}\right) + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\nu}{D}}\,\zeta\left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\zeta\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\nu}{D}}\,\zeta\right)\right]\right\} \qquad (II-2-50)$$

Il est remarquable que ce profil qui est une courbe en cloche (II-2-49) ne dépende que du nombre de Schmidt (Figure 4).

L'expression complète de la vitesse déficitaire s'écrit :

- pour $\frac{\nu}{D} = 1$

$$\frac{\sqrt{\pi Re}}{m}\,\frac{u_1(x,y)}{U} = X^{-1/2}\left(1 - \frac{N}{m}X\right)e^{-\frac{\pi}{4}\zeta^2} \qquad (II-2-51)$$

- pour $\frac{\nu}{D} \neq 1$

$$\frac{\sqrt{\pi Re}}{m}\,\frac{u_1(x,\zeta)}{U} = X^{-1/2}\left[e^{-\frac{\pi}{4}\zeta^2} - \frac{2N}{m}\frac{\sqrt{\frac{\nu}{D}}}{\left(\frac{\nu}{D}-1\right)}X\left\{\left(\sqrt{\frac{\nu}{D}}\, e^{-\frac{\pi}{4}\zeta^2} - e^{-\frac{\pi}{4}\frac{\nu}{D}\zeta^2}\right) + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\nu}{D}}\,\zeta\left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\zeta\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\nu}{D}}\,\zeta\right)\right)\right\}\right] \qquad (II-2-52)$$

et les vitesses correspondantes sur l'axe :

$$\frac{\sqrt{\pi Re}}{m}\,\frac{u_1(x,0)}{U} = X^{-1/2}\left(1-\frac{N}{m}X\right) \qquad (II-2-53)$$

et

$$\frac{\sqrt{\pi Re}}{m}\,\frac{u_1(x,0)}{U} = X^{-1/2}\left(1-\frac{N}{m}F_2'(0)X\right) \qquad (II-2-54)$$

avec :

$$F_2'(0) = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{D}{\nu}}} \qquad (II-2-55)$$

Notons que, lorsque le nombre de Schmidt est égal à l'unité, lar largeur du sillage est égale à celle de la couche chargée et les profils réduits des vitesses et des charges sont alors identiques.

2-3. Conclusion :

Dans le cas le plus réaliste, où le coefficient de diffusion des ions est faible devant la viscosité cinématique, c'est-à-dire pour un nombre de Schmidt grand devant l'unité, la zone chargée est mince à l'intérieur du sillage, les charges y sont réparties selon une distribution gaussienne (fig. 5).

Le champ aligné modifie le sillage d'une manière notable. Non seulement le profil réduit change, mais encore la vitesse déficitaire s'annule sur l'axe (fig. 6a). Elle s'annule d'autant plus vite que le champ électrique est plus important (Fig. 6b).
Ce champ accélère la vitesse sur l'axe de telle sorte qu'il nait un jet au sein du sillage (Fig. 7a). En d'autres termes, alors qu'en l'absence de champ appliqué, le débit déficitaire créé à l'amont demeure constant et n'évolue plus, lorsque le champ électrique est appliqué, l'action de la force de Coulomb prend le pas sur l'action de la viscosité et provoque un entraînement du fluide ambiant dans le sillage.

On peut se demander ce que devient le sillage dans le cas où le champ aligné est négatif, c'est-à-dire lorsque l'on interchange les électrodes, ou bien, ce qui est équivalent, lorsque l'on injecte des charges négatives dans un champ positif. La figure (7b) permet d'esquisser une réponse à cette question ; elle montre que le sillage se creuse davantage, sa vitesse devenant de plus en plus faible.
En outre, la vitesse relative due à la mobilité propre des charges KE_o, étant négative dans ce cas-ci, le mouvement qui en résulte a tendance à s'opposer à celui de

l'écoulement. Ainsi l'entraînement des charges n'en est que plus faible.

3 - Influence d'une composante transversale impaire.

Si P_o est différent de zéro, les équations de base (II-1-1) et (II-1-2) s'écrivent :

$$U\frac{\partial q}{\partial x} = D\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - KP_o\frac{\partial}{\partial y}(qy) \qquad (II-3-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) = \nu\frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3} + \frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial q}{\partial y}(E_o - P_o x) + P_o y\frac{\partial q}{\partial x}\right] \qquad (II-3-2)$$

3-1. Equation de la charge

Avec les mêmes notations que plus haut, l'équation de la charge devient en variables réduites :

$$\frac{(q_o\delta)'}{q_o\delta'}G' - \left(1-\frac{KP_o\delta}{U\delta'}\right)(\eta G')' - \frac{D}{U\delta\delta'}G''' = 0 \qquad (II-3-3)$$

Un raisonnement analogue conduit aux résultats suivants :

$$q_o\delta = Q_o \quad , \quad G'(\eta) = e^{-\frac{\pi}{4}\eta^2} \qquad (II-3-4)$$

et :

$$\delta\delta' - \frac{KP_o}{U}\delta^2 = \frac{\pi}{2}\frac{D}{U} \qquad (II-3-5)$$

La loi $\delta(x)$ s'obtient en intégrant (III-3-5) ; on obtient en grandeurs adimensionnelles :

$$\sqrt{\frac{Uh}{\pi D}}\frac{\delta(x)}{h} = \sqrt{\frac{1}{2\mu}}\left(e^{2\mu X}-1\right)^{1/2} \qquad (II-3-6)$$

où :

$$\mu = \frac{KP_o h}{U} \qquad (II-3-7)$$

μ est le rapport de la vitesse relative $KP_o h$ due à la mobilité dans le champ à la vitesse extérieure U .

Nous avons tracé sur la figure (8a) les courbes représentatives de la loi de $\delta(x)$, afin de mieux faire ressortir l'influence de la composante E_y pour diverses valeurs de μ ; nous y avons porté comme référence la courbe de l'épaisseur $\delta(x)$, du champ aligné. On constate que la composante transversale du champ appliqué contribue à l'élargissement de la zone chargée. Il faut noter cependant que cet élargissement est faible : car avec les ordres de grandeurs suivants :

$$P_o h \simeq 10^5 \frac{V}{m} \quad , \qquad U \simeq 1 \frac{m}{s} \quad , \quad K = 10^{-8} \frac{m}{V.s} \qquad (II-3-8)$$

μ est l'ordre de 10^{-3} et reste généralement faible devant l'unité. Aussi, à une distance finie, un développement limité de l'expression (III-3-6) montre que cette dernière loi de $\delta(x)$ est très voisine de celle obtenue dans le cas du champ aligné. Par conséquent, nous conservons dans ce qui suit, la même loi $\delta(x)$ en $x^{1/2}$ du champ aligné qui est une approximation acceptable de (II-3-6). (pour $x \leq 10$, l'erreur demeure inférieure à 0,5 % avec les valeurs numériques (III-3-8)).

Avant de passer à l'équation du mouvement, il semble intéressant de souligner que si P_o change de signe, ce qui correspond à une composante E_y négative, on trouve une autre loi de $\delta(x)$ qui est :

$$\sqrt{\frac{\pi D}{U h}} \frac{\delta(x)}{h} = \sqrt{\frac{1}{2\mu}} \left(1 - e^{-2\mu x}\right)^{1/2} \qquad (II-3-9)$$

L'effet de la composante Ey se traduit alors par un amincissement de la couche chargée (fig. 8b).

3-2 Equation du mouvement.

Elle s'écrit :

$$U \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \left[-q(E_o - P_o x) + P_o \int_o^y \frac{\partial q}{\partial x} y \, dy \right] \qquad (II-3-10)$$

Le théorème de quantité de mouvement donne :

$$U \int_o^\infty u_1 \, dy = C^{te} - \left(\frac{E_o Q_o}{\rho} + 2 \frac{P_o Q_o D}{\rho U} \right) x + \frac{P_o Q_o}{\rho} \frac{x^2}{2} \qquad (II-3-11)$$

ou bien:

$$R = m \left(1 - \frac{(N + 2P^*/P_e)}{m} X + \frac{P^*}{2m} X^2 \right) \qquad (II-3-12)$$

avec :

$$R = \frac{\int_o^\infty u_1 dy}{U h} \quad , \quad P^* = \frac{P_o h Q_o}{\rho U^2} \qquad (II-3-13)$$

Les nombres N et P mesurent l'importance relative des forces de Coulomb par rapport aux forces d'inertie.

Nous avons porté sur la figure (9a) le réseau des courbes R(X) pour

diverses valeurs de N et pour un nombre P fixé. Notons que pour une injection faible les nombres N et P sont de l'ordre de 10^{-3}. Ce même réseau a été repris à la figure (9b) où l'on a fait varier P pour un nombre N donné.

L'examen de ces figures fait ressortir deux aspects importants. En premier lieu, on remarque que l'influence du paramètre N est d'annuler le débit déficitaire relatif R : c'est l'effet déjà rencontré du champ aligné. Le second aspect nouveau est l'existence d'un minimum pour les courbes R(X). En effet au lieu de diminuer constamment R(X) passe par un minimum au point d'abscisse :

$$X = \frac{N}{P^*} + \frac{2}{P_e} \qquad (II - 3 - 14)$$

puis se met à croître au-delà de cette abscisse.

Pour éclaircir ce point, il importe de préciser le rôle du scalaire P_o. Tout d'abord il intervient dans le champ aligné qui devient $E_o - P_o x$. Ce scalaire va donc atténuer l'effet du champ Ex et diminuer l'accélération du sillage. Le champ Ex s'annule au point d'abscisse $X = \frac{E_o}{P_o h}$ qui est égal aussi au rapport $\frac{N}{P}$. Il faut noter que le nombre de Peclet étant très grand, (1/Pe de l'ordre de 10^{-6}). cette abscisse est très peu différente de l'abscisse des minima des courbes R(X). Il n'est donc pas étonnant que le débit déficitaire relatif croisse pour des X assez grands puisque le champ Ex a changé de sens : c'est le fait observé au cas précédent du ralentissement du sillage par un champ aligné négatif.

Ensuite, le champ Ey = Poy a pour effet non seulement d'élargir la couche des changes, fait déjà noté au paragraphe précédent, mais aussi de créer un gradient de pression $\frac{dP}{dx}$ négatif. En effet la seconde équation de Navier Stokes montre que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = q E_y$$

et l'équilibre d'une tranche suivant Oy s'écrit :

$$P_e - P_o = P_o Q_o \delta \int_o^\infty \eta g \, d\eta$$

p_e étant la pression à l'extérieure du sillage est constante et on a :

$$p_o = p_e - \frac{2}{\pi} P_o Q_o \delta$$

La pression P_o dans le sillage décroît au fur et à mesure que δ croît ; d'où :

$$\frac{dp_o}{dx} = -\frac{2}{\pi} P_o Q_o \delta' < 0$$

Cet effet tend donc à accélérer le fluide dans le sens de l'écoulement, c'est-à-dire à diminuer le débit déficitaire, à l'annuler et à créer un jet. En résumé on voit, dans l'expression II-3-12 du débit déficitaire R, que le scalaire P_o joue dans les deux sens :

- par le terme en X^2, l'effet de Pox s'oppose à celui du champ aligné pour faire croître le débit déficitaire et décélérer le fluide.

- par le terme en X, l'effet du gradient $\frac{dp_o}{dx}$ s'ajoute à l'effet du champ pour accélérer le fluide et créer un jet.

Cherchons maintenant à déterminer les profils de vitesse. L'expression (II-3-11) du débit déficitaire nous conduit, comme dans le cas du champ aligné, à envisager une superposition linéaire de solutions particulières, mais cette fois avec trois termes, de telle sorte que :

$$u_1(x,y) = u_{o1}(x) f_1(\zeta) + u_{o2}(x) f_2(\zeta) + u_{o3}(x) f_3(\zeta) \qquad (II-3-15)$$

où :

$$u_{o1}(x) = \frac{C_R U d}{4 \int_0^\infty f_1 d\zeta} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi\nu}{U}}} x^{-1/2} \qquad (II-3-16)$$

$$u_{o2}(x) = \left(1 + 2\frac{P_o D}{E_o U}\right) \frac{E_o Q_o}{PU \int_0^\infty f_2 d\zeta} \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\frac{\pi\nu}{U}}} \qquad (II-3-17)$$

$$u_{o3}(x) = \frac{P_o Q_o}{2PU \int_0^\infty f_3 d\zeta} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\frac{\pi\nu}{U}}} \qquad (II-3-18)$$

L'équation du mouvement obtenue en intégrant (II-3-2) par rapport à y s'écrit en variables réduites :

$$\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{(u_{oi}\beta)'}{u_{oi}\beta}F'_i-(\zeta F'_i)'-\frac{2}{\pi}F''_i\right]\frac{U u_{oi}\beta'}{\beta}=$$

$$\left[-\frac{q_o}{\rho}(E_o-P_o x)-\frac{P_oQ_o\delta'}{\rho}\left(\frac{\nu}{D}\zeta^2+\frac{2}{\pi}\right)\right]e^{-\frac{\pi}{4}\frac{\nu}{D}\zeta^2} \qquad (II-3-19)$$

ou encore en développant :

$$\left\{\begin{array}{l}\left[-(\zeta F'_1)'-\frac{2}{\pi}F'''_1\right]\frac{U}{2}S_1x^{-3/2}\\ +\left[2F'_2-(\zeta F'_2)'-\frac{2}{\pi}F'''_2\right]\frac{U}{2}S_2x^{-1/2}\\ +\left[4F'_3-(\zeta F'_3)'-\frac{2}{\pi}F'''_3\right]\frac{U}{2}S_3x^{1/2}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}-\left[\frac{E_oQ_o}{\rho\sqrt{\frac{\pi D}{U}}}+\frac{P_oQ_o}{2\rho}\sqrt{\frac{\pi D}{U}}\left(\frac{2}{\pi}+\frac{\nu}{D}\zeta^2\right)\right]e^{-\frac{\pi}{4}\frac{\nu}{D}\zeta^2}x^{-1/2}\\ +\frac{P_oQ_o}{\rho\sqrt{\frac{\pi D}{U}}}\;e^{-\frac{\pi}{4}\frac{\nu}{D}\zeta^2}\;x^{1/2}\end{array}\right.$$

(II - 3-20)

avec :

$$S_1=\frac{C_R}{4}\frac{Ud}{F_{1\infty}\sqrt{\frac{\pi\nu}{U}}}\frac{1}{},\quad S_2=-\frac{E_oQ_o}{\rho UF_{2\infty}}\frac{\left(1+\frac{2P_oU}{E_oU}\right)}{\sqrt{\frac{\pi\nu}{U}}},\quad S_3=\frac{P_oQ_o}{2\rho UF_{3\infty}}\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi\nu}{U}}}$$

(II - 3-21)

En identifiant les termes de la même puissance de x, on obtient, tous calculs faits et en choisissant les normalisations :

$$F_1(\infty)=F_2(\infty)=F_3(\infty)=1 \qquad (II-3-22)$$

les trois équations différentielles séparées :

$$(\zeta F'_1)'+\frac{2}{\pi}F'''_1=0 \qquad (II-3-23)$$

$$2F'_2-(\zeta F'_2)'-\frac{2}{\pi}F'''_2=2\sqrt{\frac{\nu}{D}}\left(1-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\theta\frac{\nu}{D}\zeta^2\right)e^{-\frac{\pi}{4}\frac{\nu}{D}\zeta^2} \qquad (II-3-24)$$

$$4F'_3-(\zeta F'_3)'-\frac{2}{\pi}F'''_3=4\sqrt{\frac{\nu}{D}}\;e^{-\frac{\pi}{4}\frac{\nu}{D}\zeta^2} \qquad (II-3-25)$$

où :

$$\theta=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{E_oU}{P_oD}} \qquad (II-3-26)$$

Ces équations correspondent bien aux trois cas particuliers considérés. Il faut remarquer que le système ci-dessus est tout-à-fait général car il contient les autres cas déjà étudiés.

La solution de (II-3-23) est celle du sillage classique :

$$F_1'(\xi) = e^{-\frac{\pi}{4}\xi^2} \qquad (II-3-27)$$

En posant:

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{\nu}{D} - 1 \quad , & \gamma_1 = \dfrac{\sqrt{\delta+1}}{\delta^2}\left(2\delta + \theta(2+\delta)\right) \\ \xi = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta \quad , & \gamma_2 = 8\sqrt{\pi}\,\dfrac{(\delta+1)^2}{\delta^2} \\ \gamma_0 = \dfrac{2(\delta+1)(\delta+\theta)}{\delta^2} \quad , & \gamma_3 = \dfrac{4}{3}\dfrac{\sqrt{\delta+1}}{\delta^2} \end{cases} \qquad (II-3-28)$$

on obtient les profils réduits F'2 et F'3 :

$$F_2'(\xi) = \gamma_0 e^{-\xi^2} - \gamma_1 e^{-(\delta+1)\xi^2} + \sqrt{\pi}\,\gamma_0\,\xi\left[\operatorname{erf}(\xi) - \operatorname{erf}(\sqrt{\delta+1}\,\xi)\right] \qquad (II-3-29)$$

$$F_3'(\xi) = \gamma_2\left\{\left(\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi}{2}\right)\left[\operatorname{erf}(\xi) - \operatorname{erf}(\sqrt{\delta+1}\,\xi)\right] + \frac{(\xi^2+1)}{3\sqrt{\pi}}\,e^{-\xi^2}\right\} - \gamma_3\left\{2(\delta+1)\xi^2 + (2+3\delta)\right\} e^{-(\delta+1)\xi^2} \qquad (II-3-30)$$

Ces expressions se simplifient notablement dans ce cas singulier si $\frac{\nu}{D} = 1$.

$$F_2'(\xi) = \left(1 - \frac{\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\xi^2\right) e^{-\xi^2} \qquad (III-3-31) \quad , \quad F_3'(\xi) = e^{-\xi^2} \qquad (III-3-32)$$

Les valeurs sur l'axe de F'2 et F'3 sont :

$$F_2'(0) = \gamma_0 - \gamma_1 \qquad (III-3-33), \qquad F_3'(0) = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{\delta+1}}{\delta^2}\left[2(\delta+1)^{3/2} - (2+3\delta)\right] \qquad (II-3-34)$$

et pour $\frac{\nu}{D} = 1$:

$$F_2'(0) = 1 - \frac{\theta}{4} \qquad (II-3-35)$$

$$F_3'(0) = 1 \qquad (II-3-36)$$

Le nombre θ qui s'écrit

$$\theta = \frac{1}{1 + \frac{P_e}{2}\frac{N}{P^*}} \qquad (II-3-37)$$

caractérise le rapport de la composante transversale Ey au champ appliqué total.

θ s'annule avec Po (c'est le cas du champ aligné), et tend vers l'unité

lorsque Fo tend vers zéro.

Les profils réduits F'1 et F'3 ne dépendent que du nombre de Schmidt, mais le profil réduit F'2 dépend, en plus, du paramètre Θ . Dans le cas particulier où le nombre de Schmidt est égal à l'unité, la figure (10) montre, d'une part que les trois profils sont identiques lorsque Θ est nul, et d'autre part que le profil F'2 varie beaucoup avec Θ . Mais lorsque le nombre de Schmidt est assez grand, l'influence de Θ sur le profil F'2 reste faible (figures 11a, b, c, d).

L'expression générale de la vitesse déficitaire est :

$$\frac{1}{m}\frac{\pi\nu}{Uh}\frac{u_1(x\,\varphi)}{U} = X^{-1/2}\left[F_1'(\varphi) - \frac{(N+2P^*/P_e)}{m}F_2'(\varphi)\,X + \frac{P^*}{2m}F_3'(\varphi)\,X^2\right] \qquad (II-3-38)$$

Les courbes des figures (12a, 12b) représentent l'évolution de la vitesse déficitaire sur l'axe. Ces courbes reflètent les effets de Po déjà rencontrés à propos du débit déficitaire relatif R.

Par ailleurs les courbes représentatives de l'expression générale de la vitesse déficitaire ont été tracées sur les figures (13a, 13b). On remarque là aussi que la vitesse déficitaire reste positive et plus importante lorsque P^* est supérieur à N que dans le cas contraire.

Afin de mieux apprécier les effets du champ aligné lorsque la composante transversale Ey est négative nous avons porté sur les figures (14a, 14b, 15a et 15b) les courbes de la vitesse déficitaire en donnant diverses valeurs au nombre N. On constate que l'accélération du sillage est beaucoup plus marquée lorsque le champ Ex est entièrement positif, c'est-à-dire lorsque N et P^* sont de signes contraires (Fig. 15b), que dans tous les autres cas. En effet la composante transversale de la force de Coulomb, négative dans ce cas, repousse les particules fluides dans le sillage et celles-ci sont, soit accélérées, soit ralenties suivant que la composante longitudinale est positive ou non.

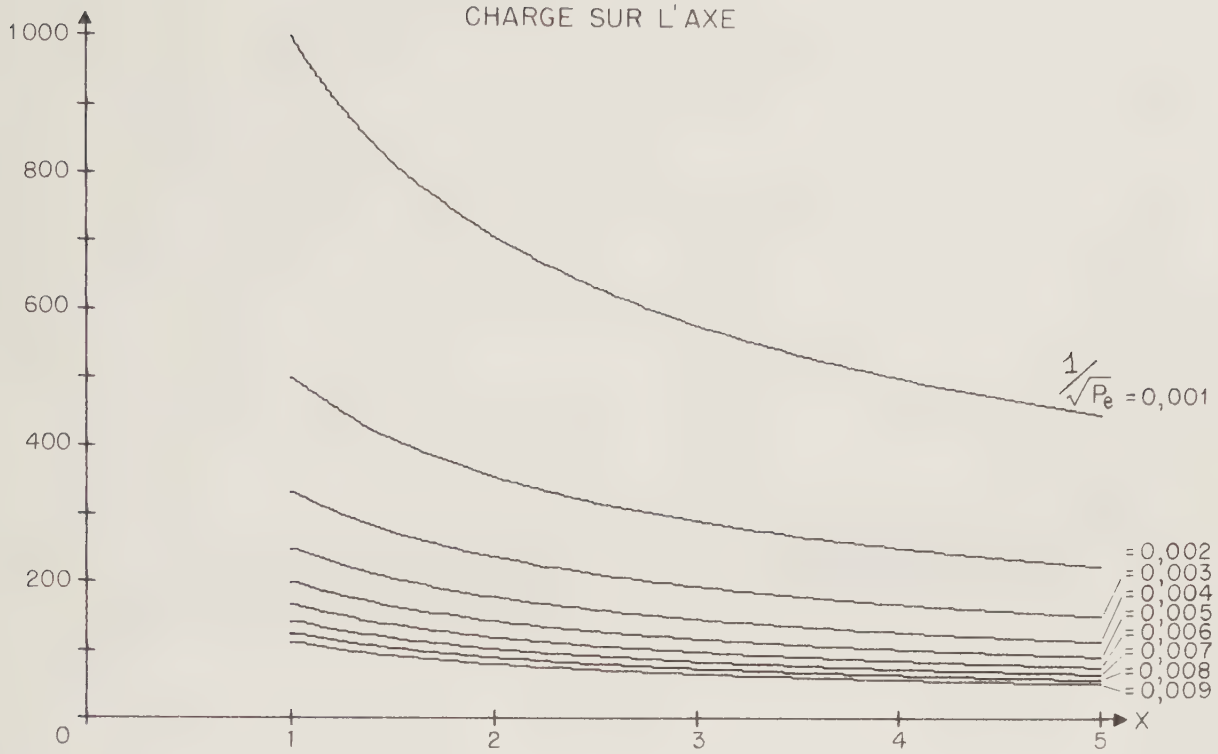
3-3 Conclusion

Lorsque le champ appliqué comporte une composante transversale, il s'établit une vitesse relative transversale due à la mobilité K. Il s'ajoute alors à la diffusion un mouvement relatif qui tend à répartir les charges électriques dans une bande sensiblement plus large. Signalons que cette bande est au contraire plus

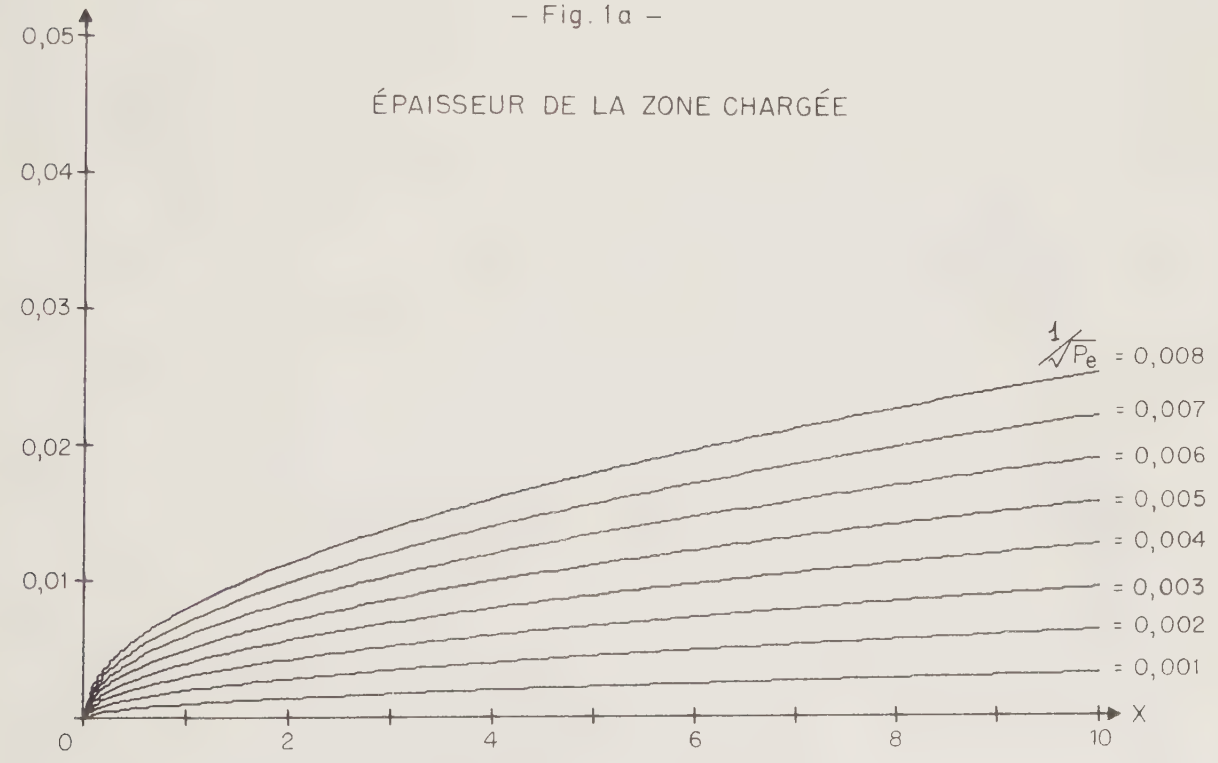
étroite dans le cas d'une composante Ey négative. L'influence de cette composante sur l'élargissement du sillage est cependant faible, si bien que la diffusion constitue encore un facteur important quant au développement de la zone chargée.

Le champ transversal Ey affecte aussi la vitesse déficitaire. En effet, si l'accélération centrale du sillage peut encore être observée lorsque la composante Ey est faible devant la composante Ex, on remarque au contraire que cette accélération se trouve réduite aussitôt que la composante Ey prend de l'importance. La vitesse d'entraînement suivant l'axe étant ainsi atténuée, on peut penser que sous l'influence d'une forte composante transversale, les charges auront tendance, grâce à leur mobilité, à se mouvoir hors du sillage.

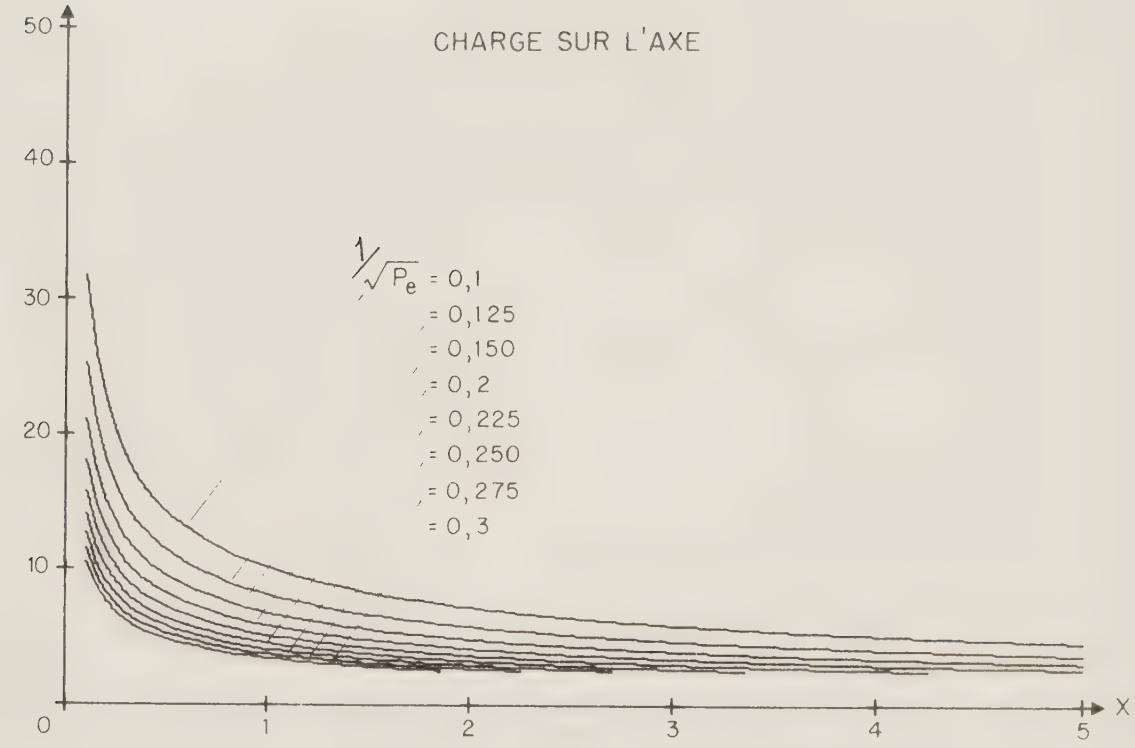
CHAMP ALIGNÉ



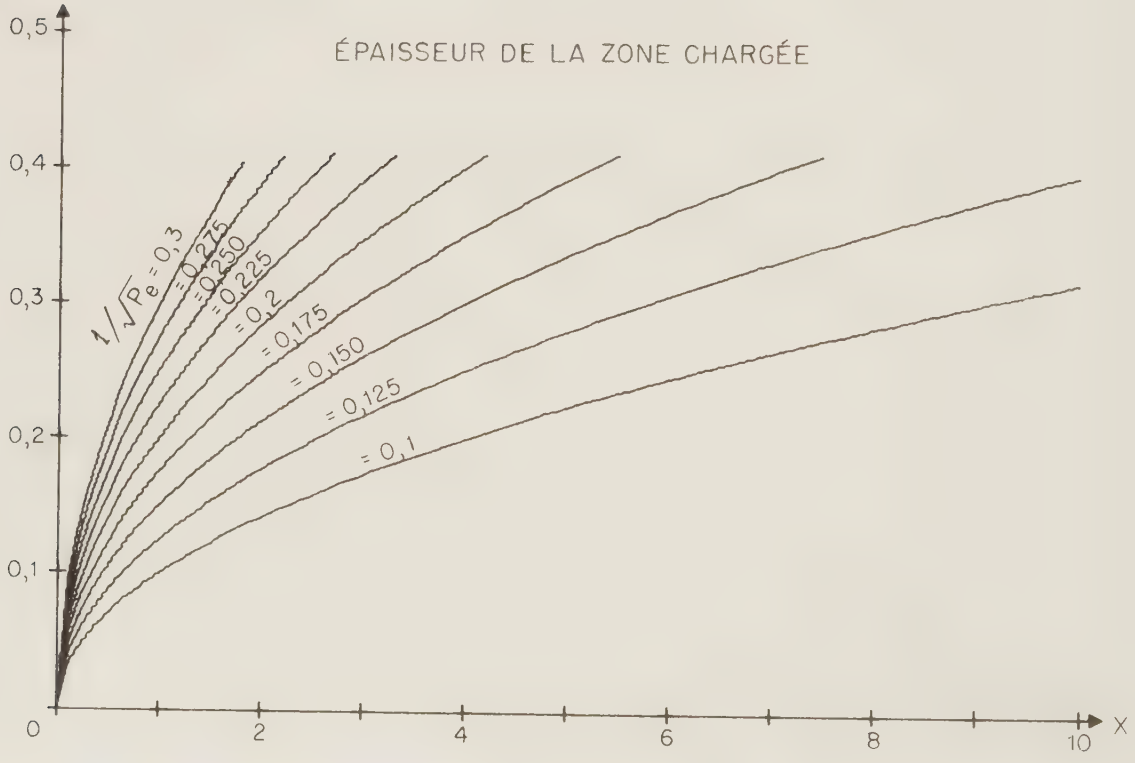
– Fig. 1a –



– Fig. 1b –

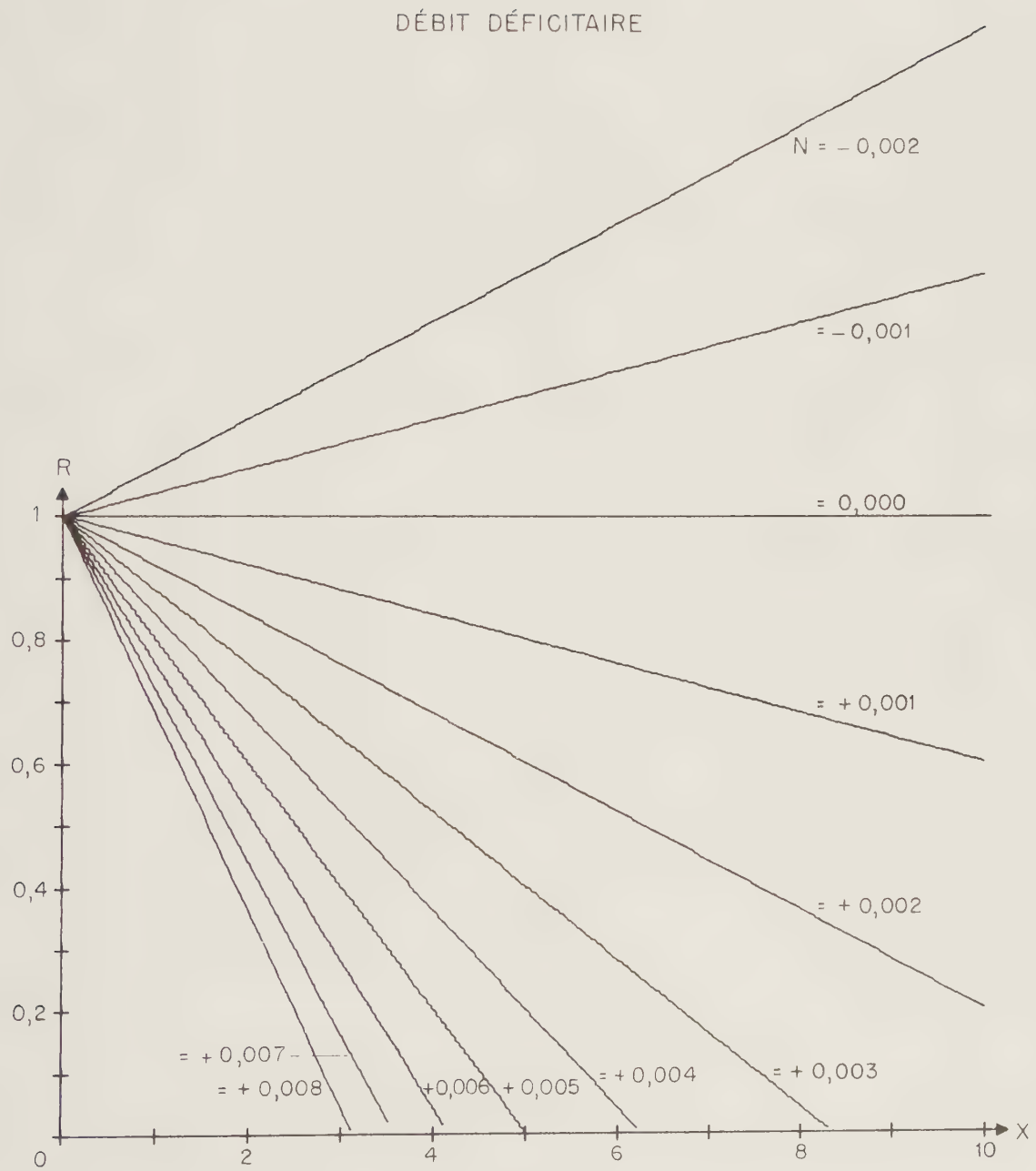

CHARGE SUR L'AXE
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
X
1/√Pe = 0,1
= 0,125
= 0,150
= 0,2
= 0,225
= 0,250
= 0,275
= 0,3

– Fig. 2a –


ÉPAISSEUR DE LA ZONE CHARGÉE
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
2
4
6
8
10
X
1/√Pe = 0,3
= 0,275
= 0,250
= 0,225
= 0,2
= 0,175
= 0,150
= 0,125
= 0,1

– Fig. 2b –

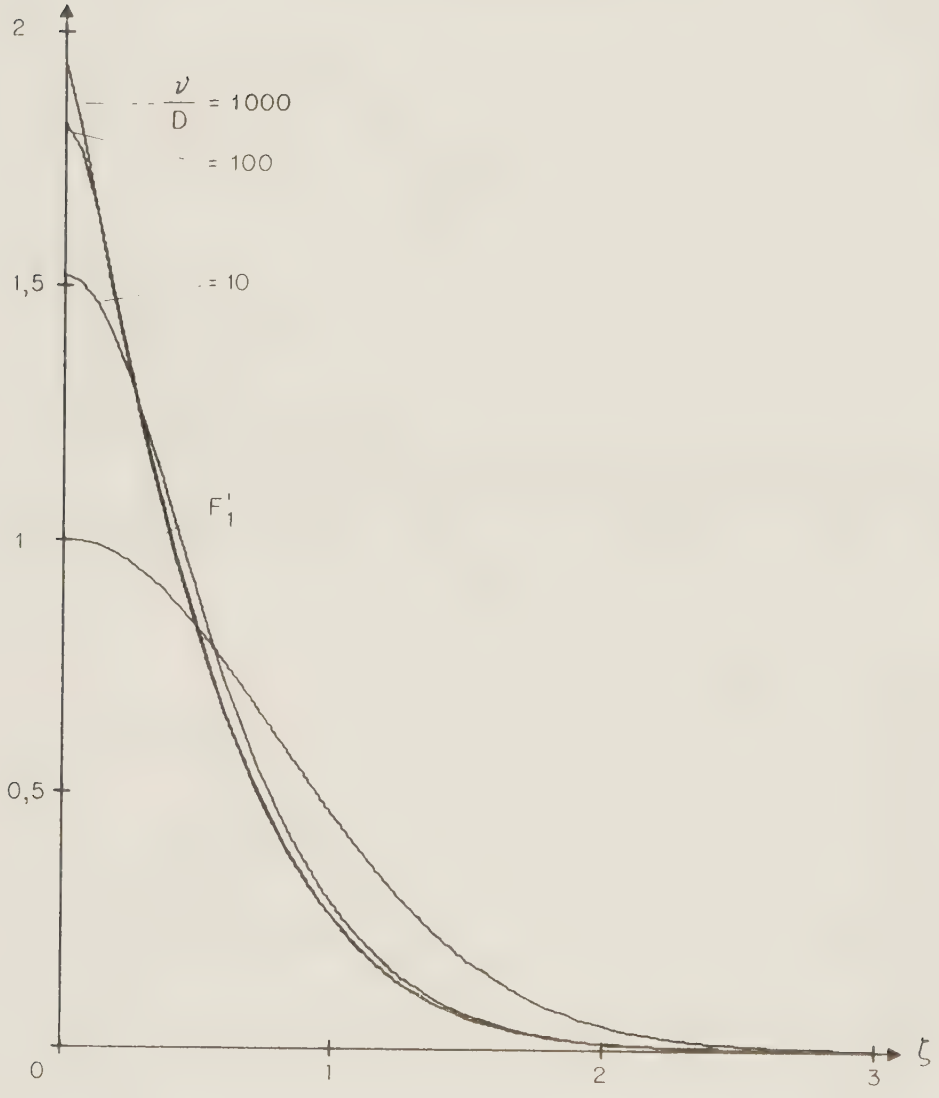
CHAMP ALIGNÉ



– Fig. 3 –

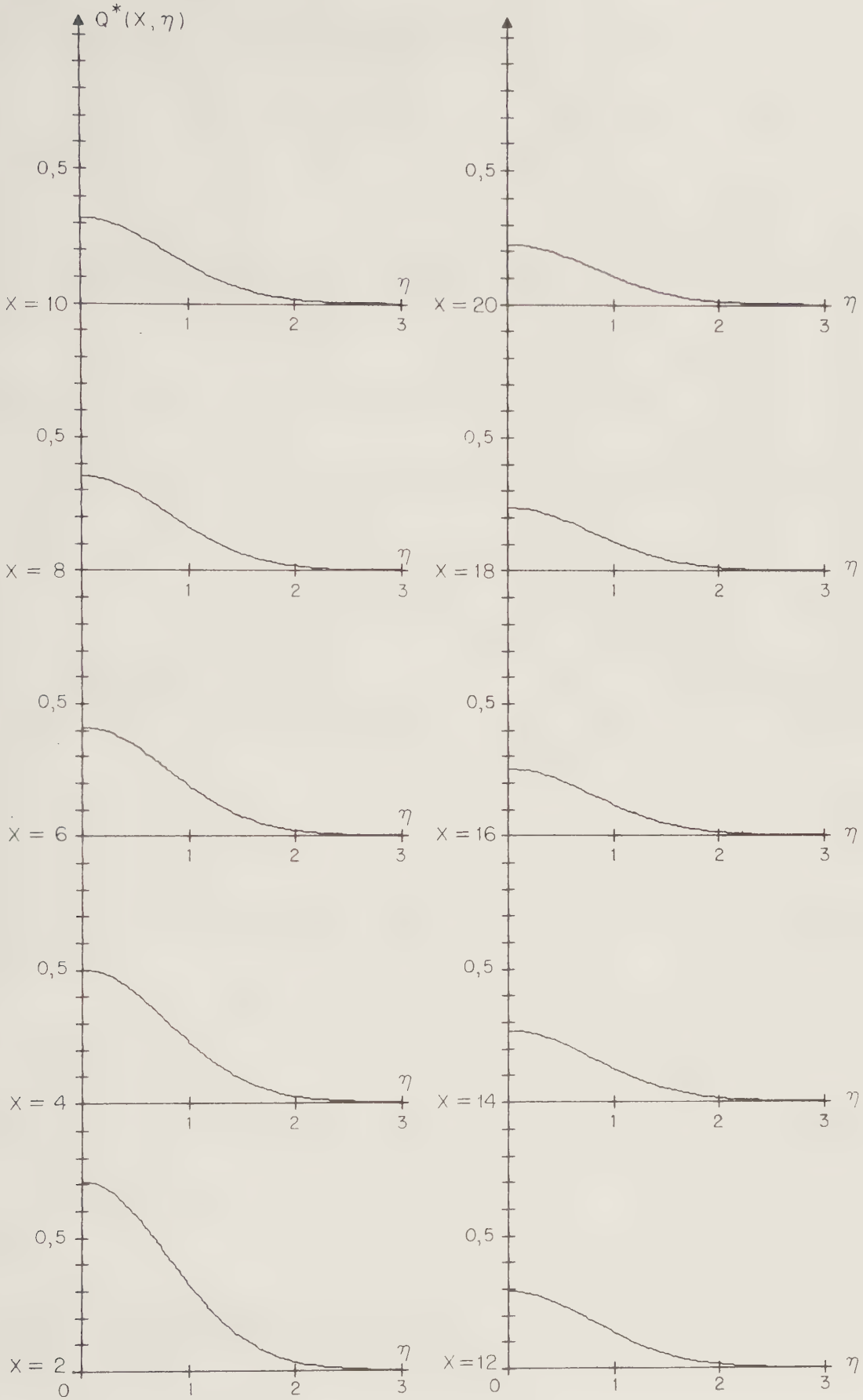
CHAMP ALIGNÉ

PROFIL RÉDUIT F'_2



– Fig. 4 –

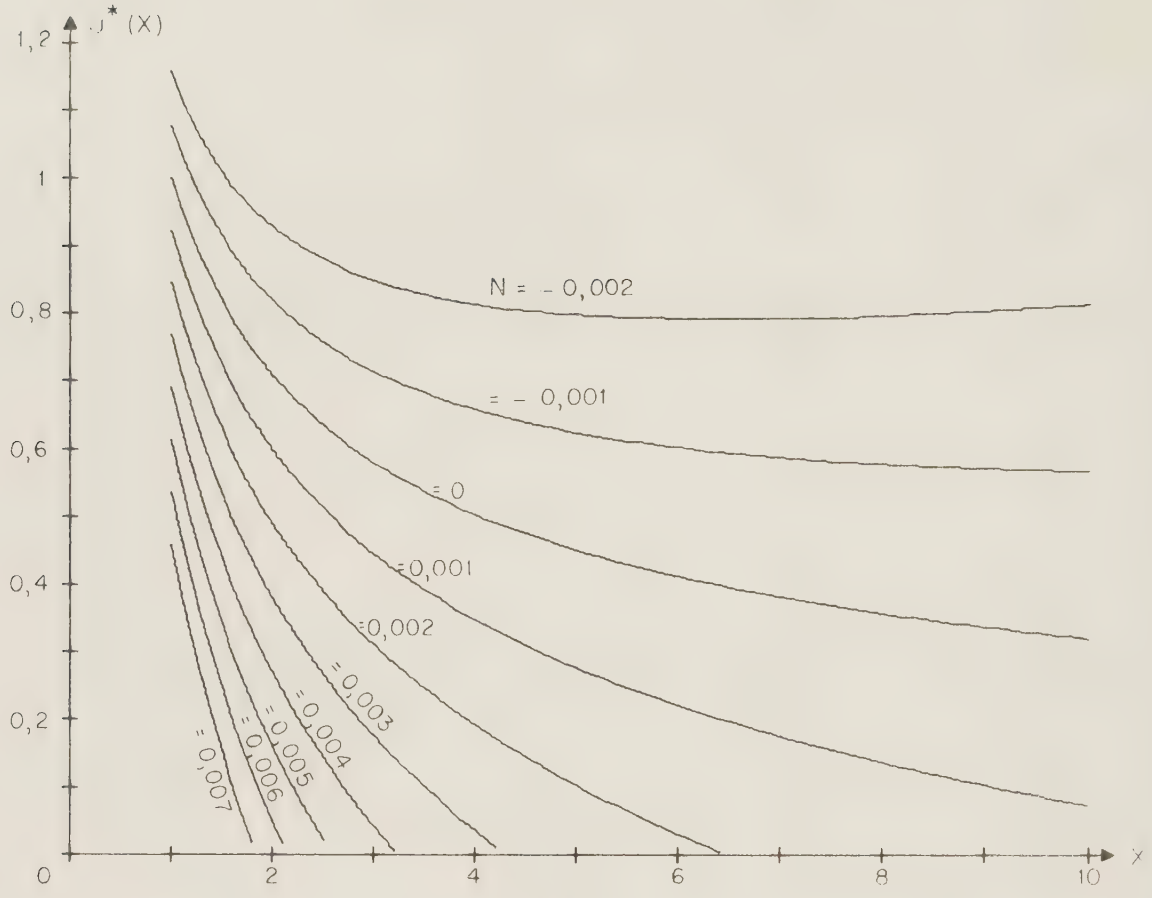
CHAMP ALIGNÉ : DISRIBUTION DES CHARGES



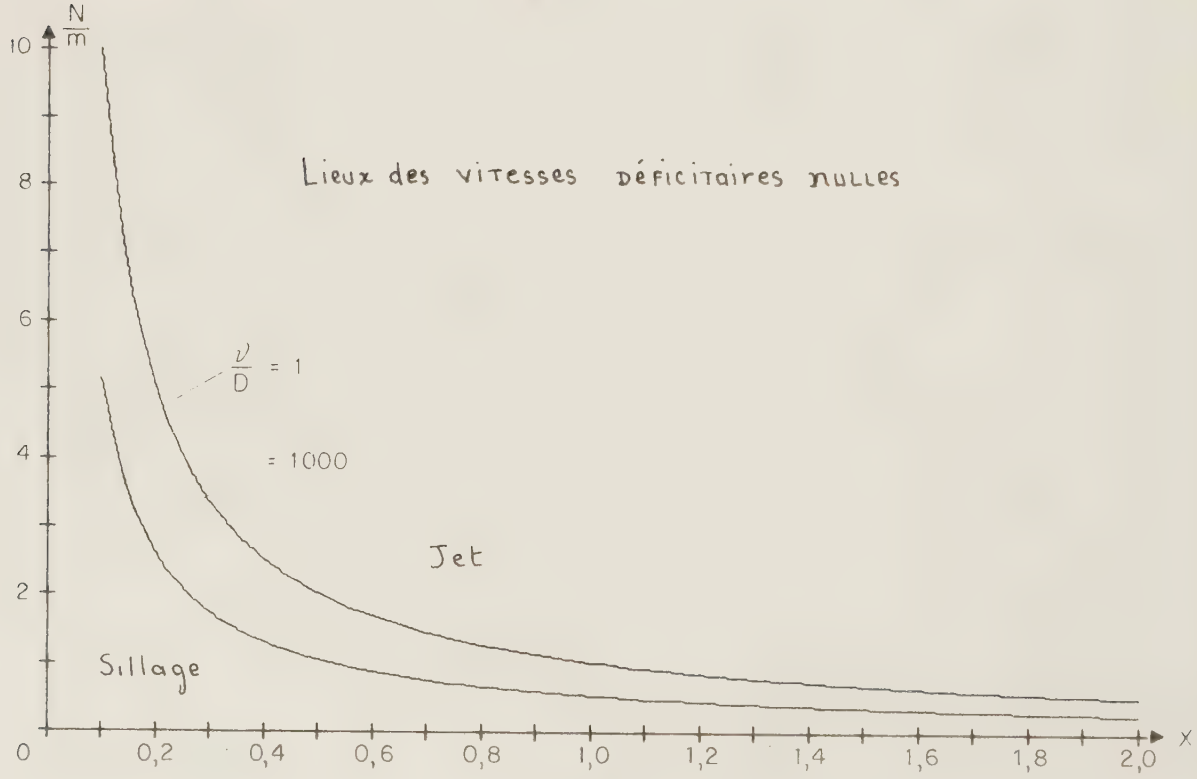
- Fig. 5 -

CHAMP ALIGNÉ

VITESSE DÉFICITAIRE SUR L'AXE

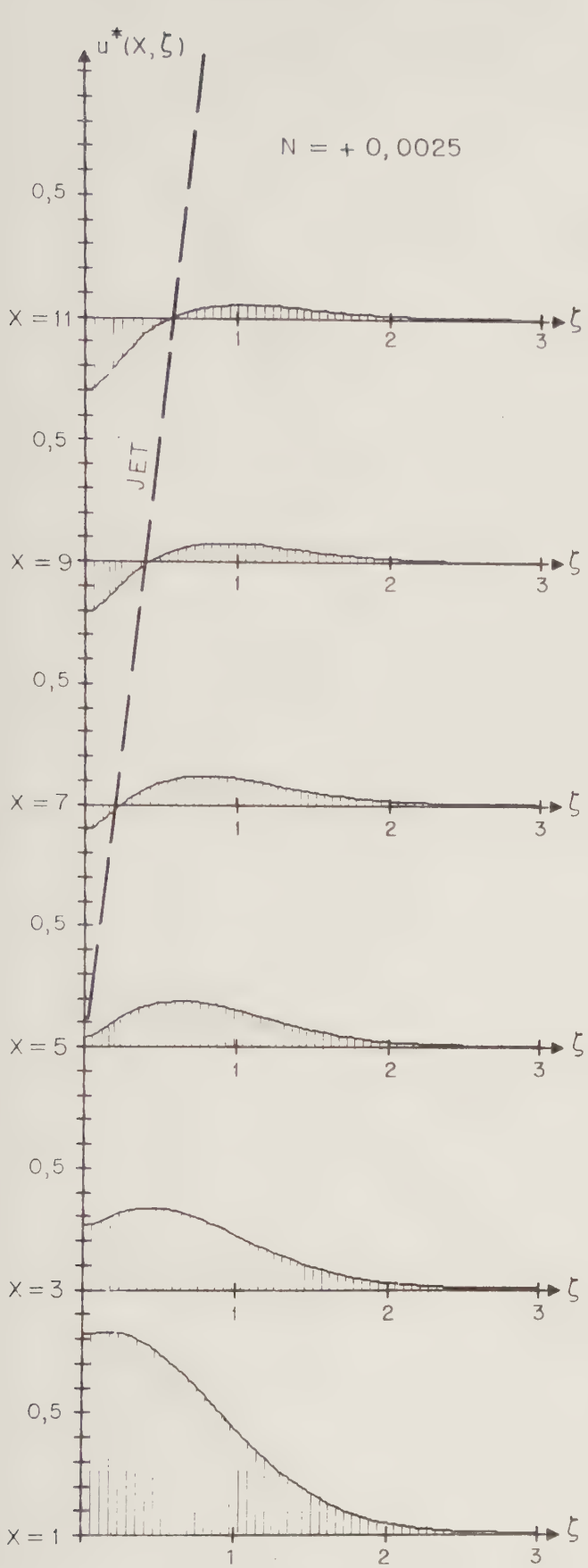


- Fig. 6 a -

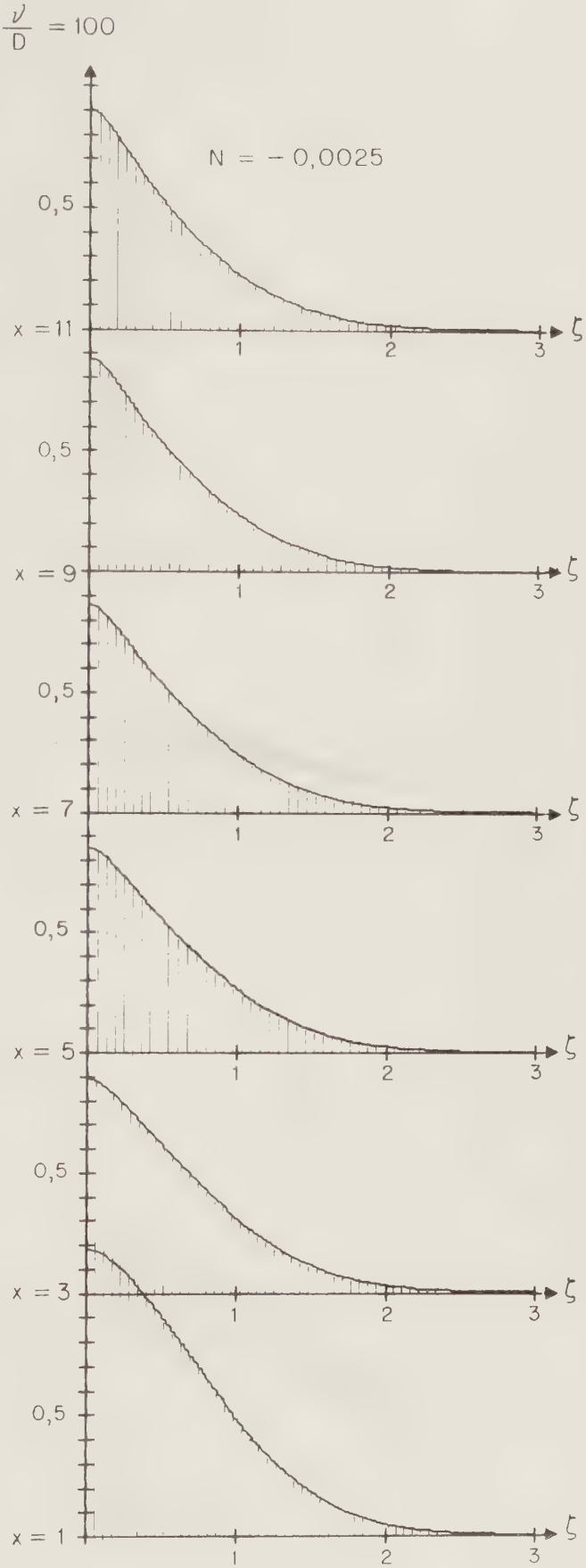


- Fig. 6 b -

CHAMP ALIGNÉ : DISTRIBUTION DE LA VITESSE DÉFICITAIRE



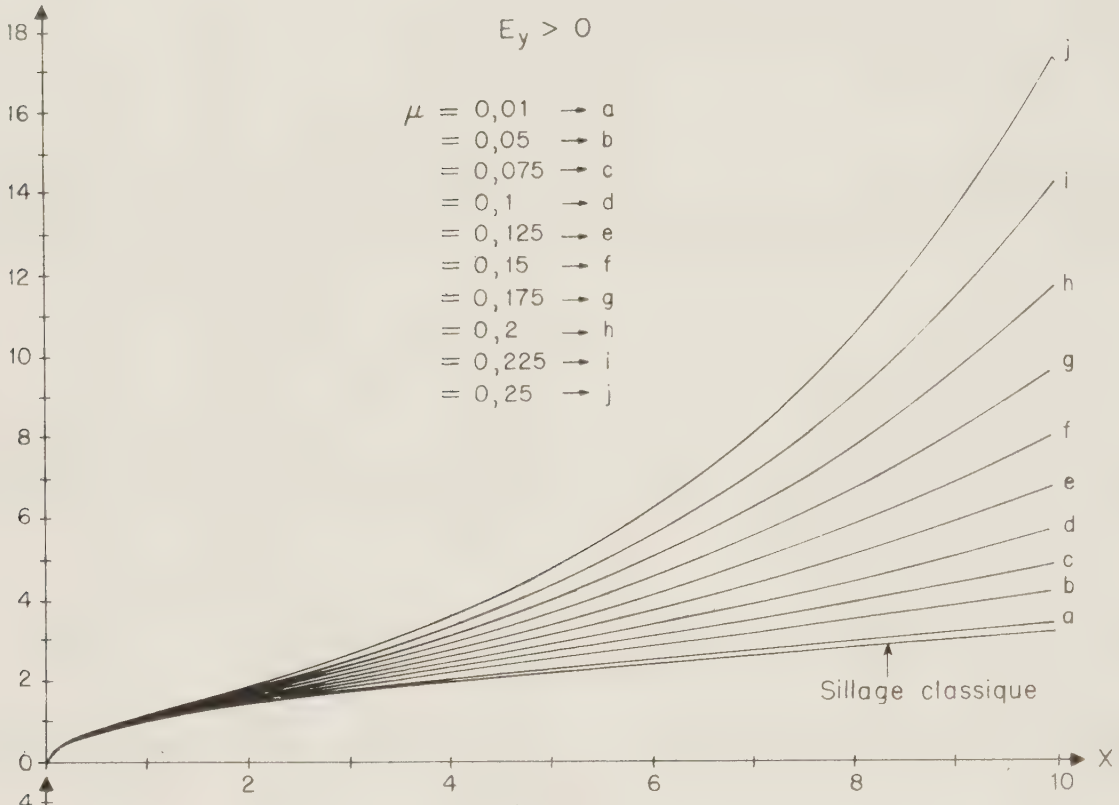
- Fig. 7a -



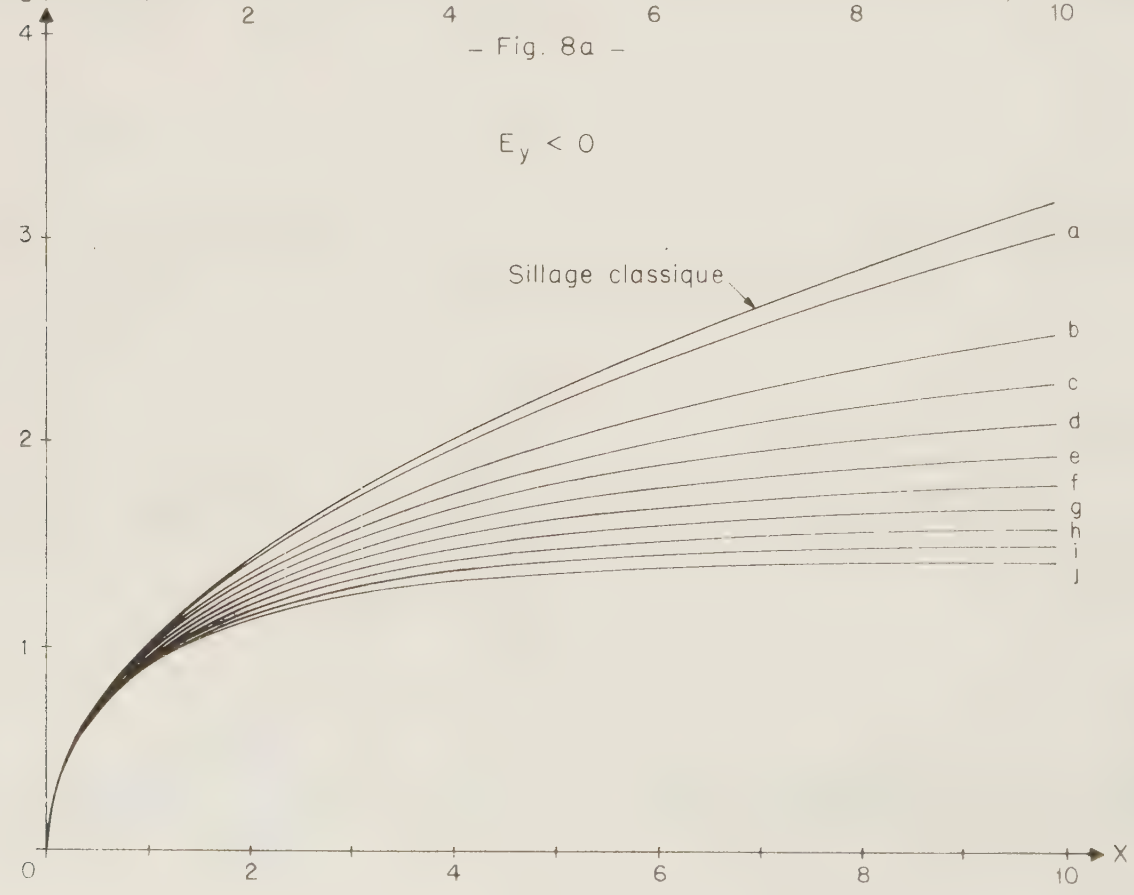
- Fig. 7b -

INFLUENCE D'UNE COMPOSANTE TRANSVERSALE IMPAIRE

ÉPAISSEUR DE LA ZONE CHARGÉE



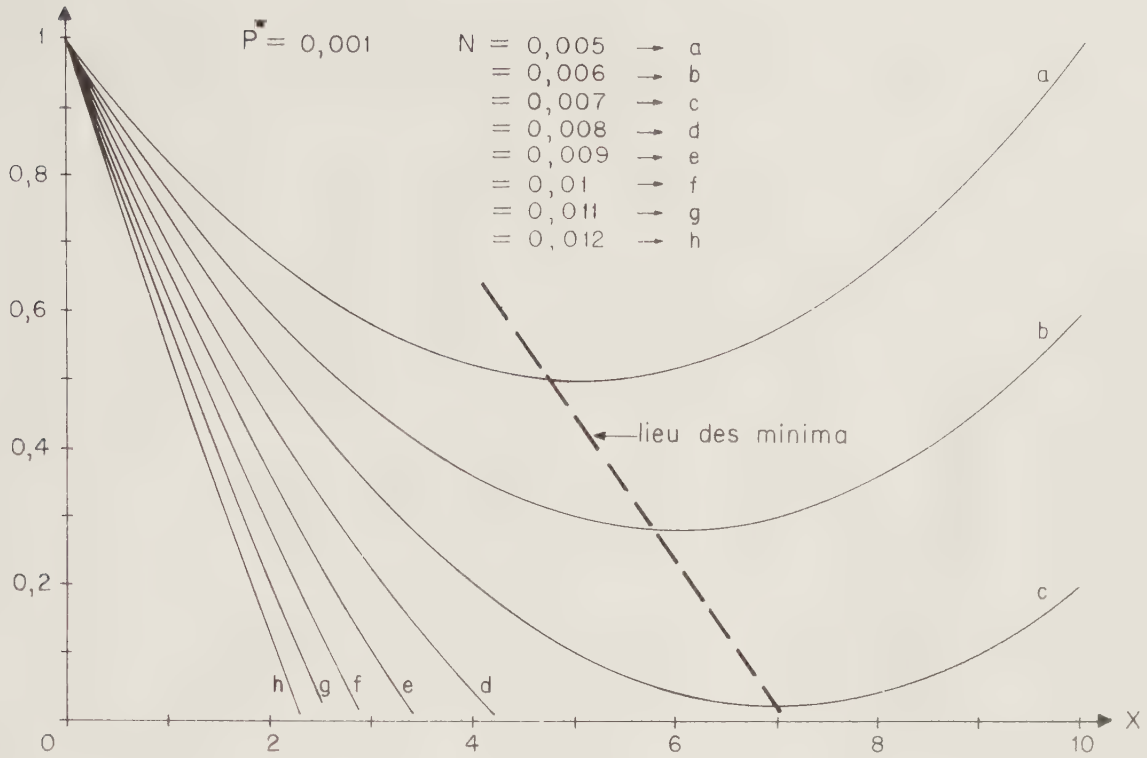
– Fig. 8a –



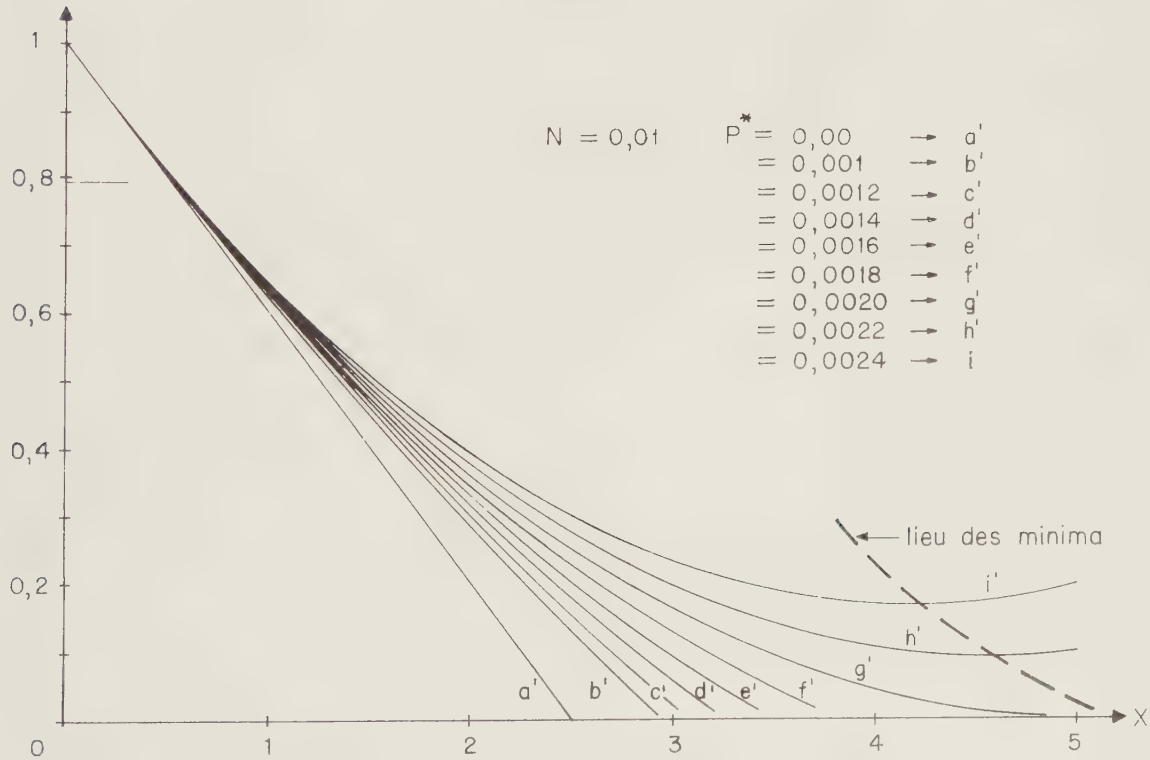
– Fig. 8 b –

INFLUENCE D'UNE COMPOSANTE TRANSVERSALE IMPAIRE

DÉBIT DÉFICITAIRE



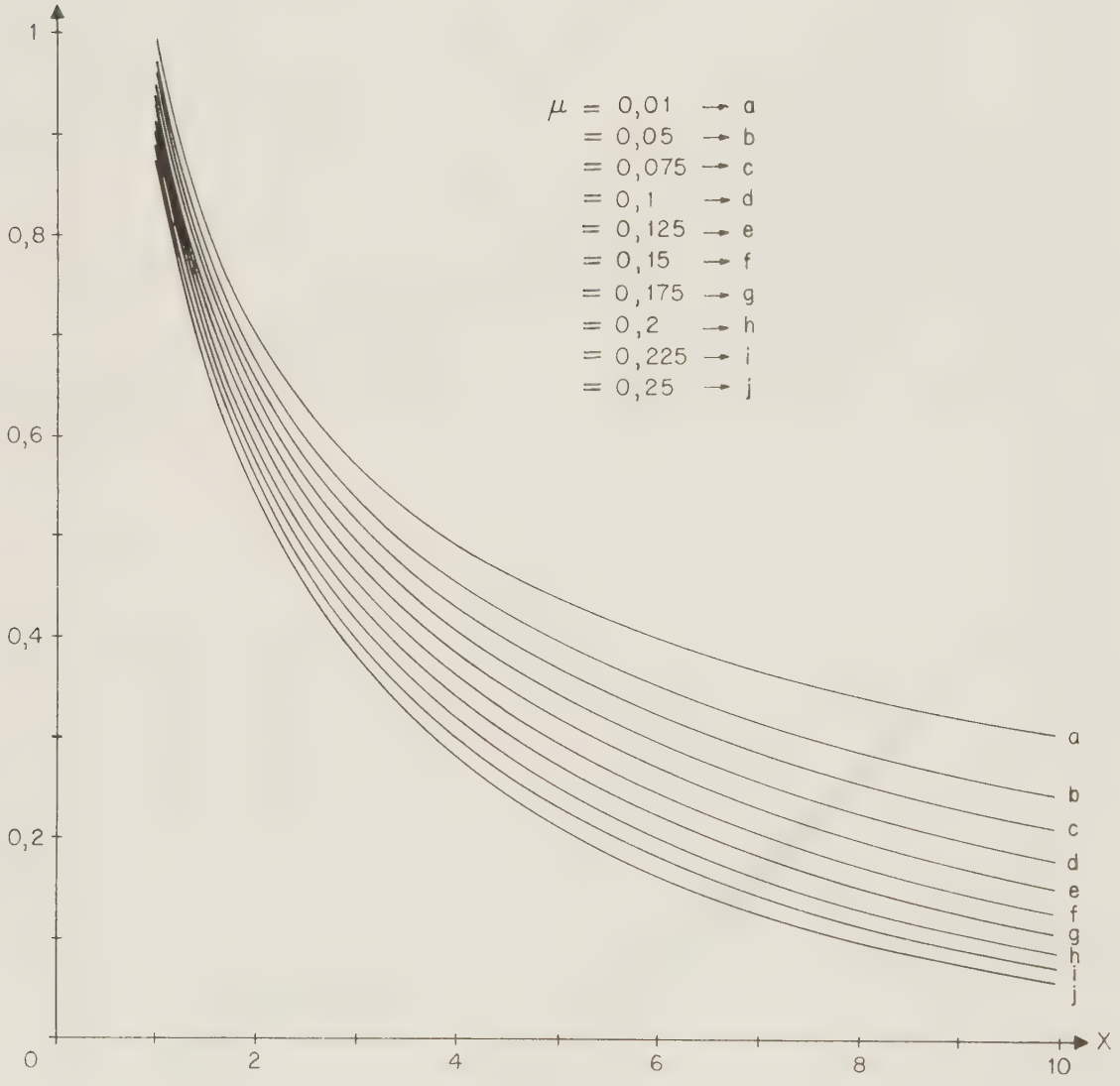
– Fig. 9 a –



– Fig. 9 b –

INFLUENCE D'UNE COMPOSANTE TRANSVERSALE IMPAIRE

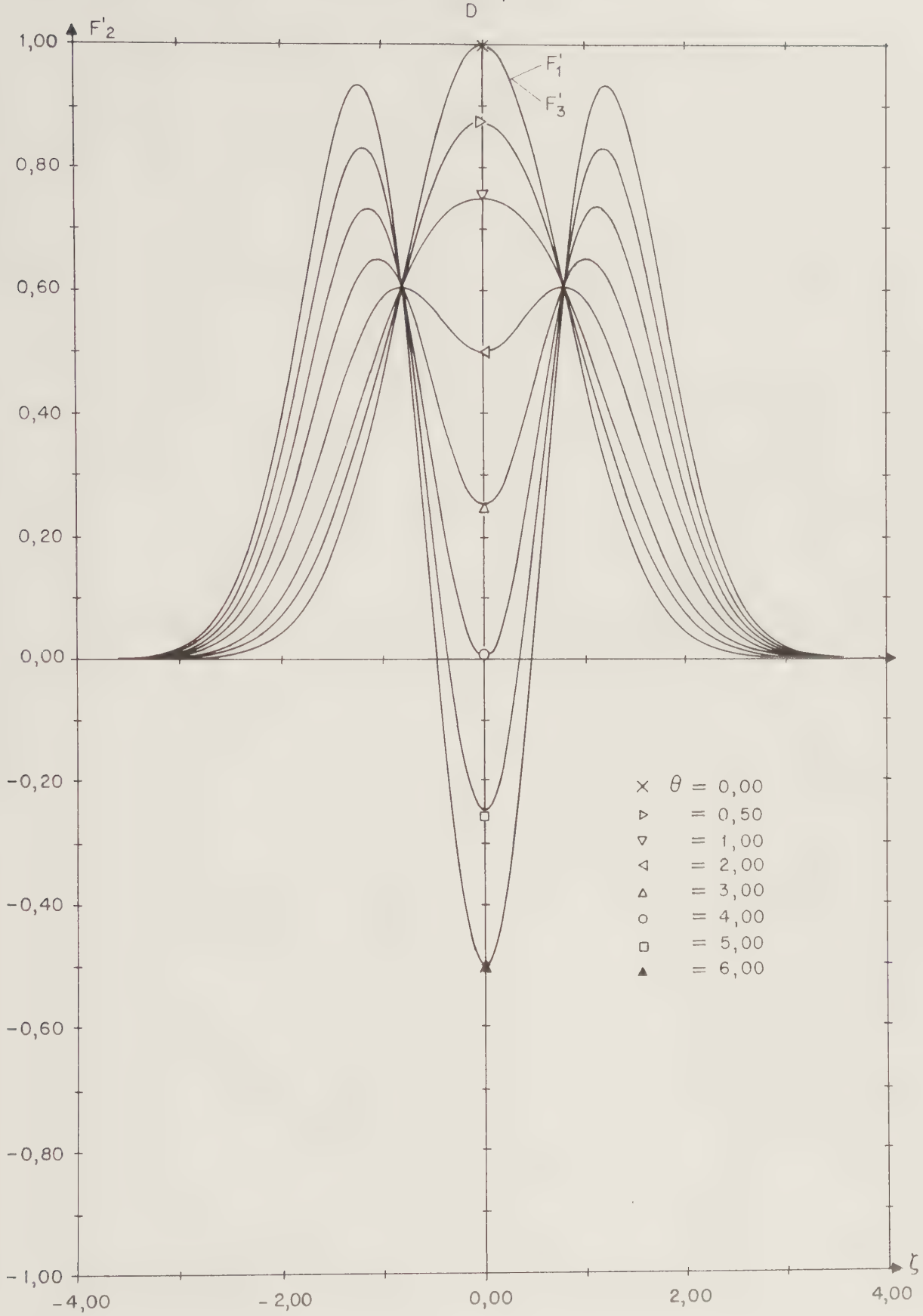
LOI DE LA CHARGE SUR L'AXE



- Fig. 8 c -

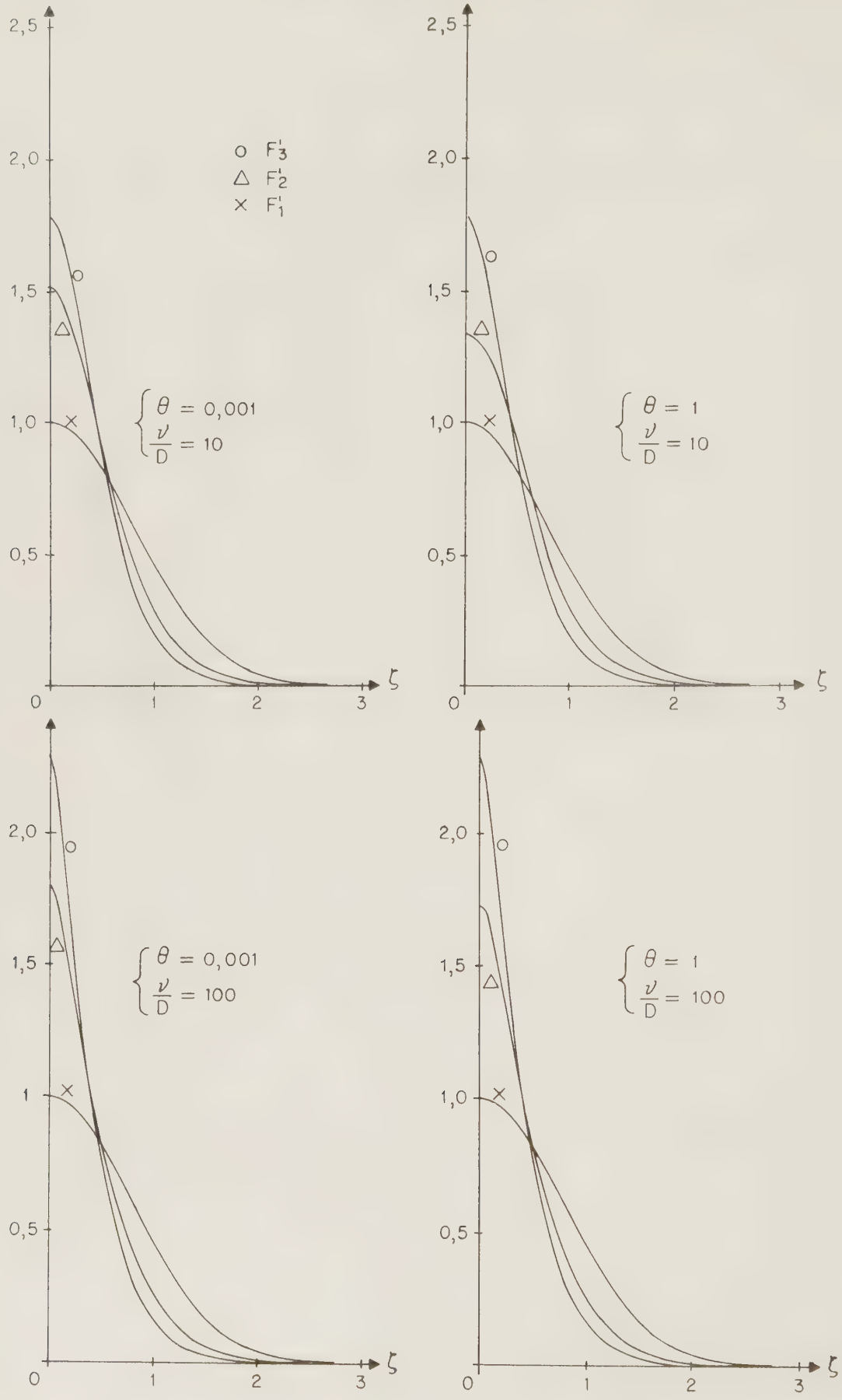
PROFIL RÉDUIT F'_2

$\frac{\nu}{D} = 1$



– Fig. 10 –

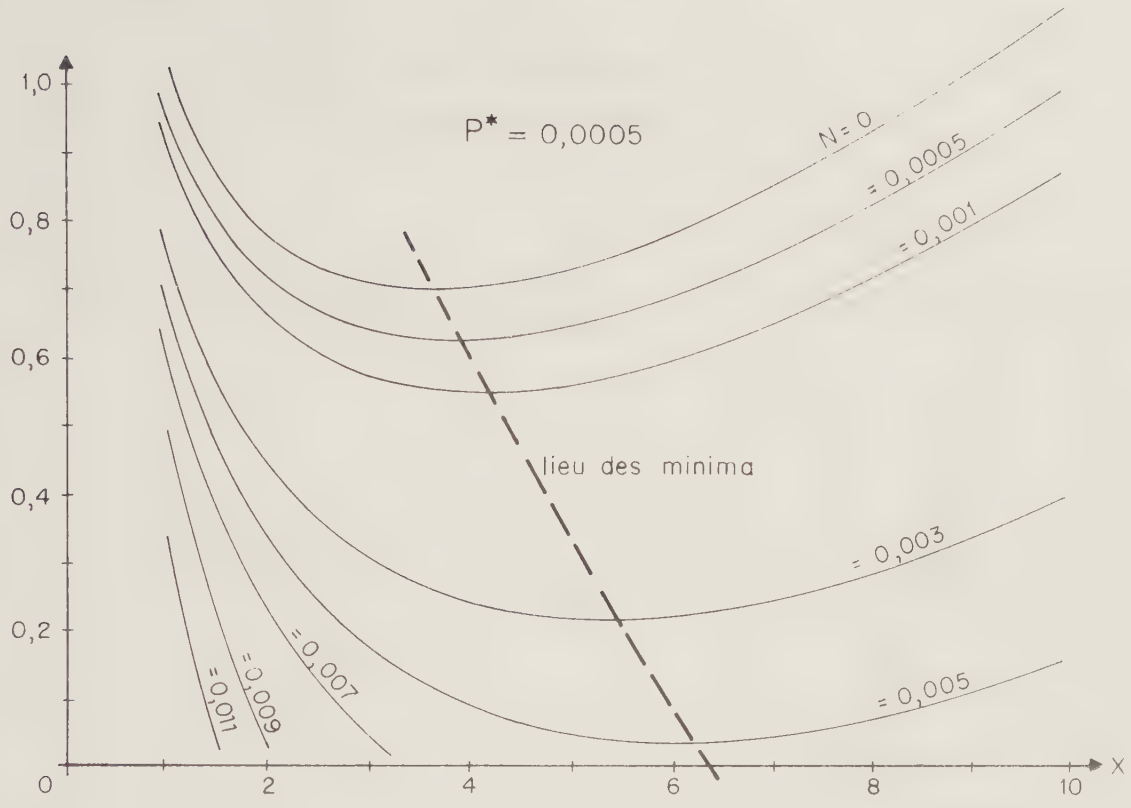
PROFILS RÉDUITS F_1' F_2' F_3'



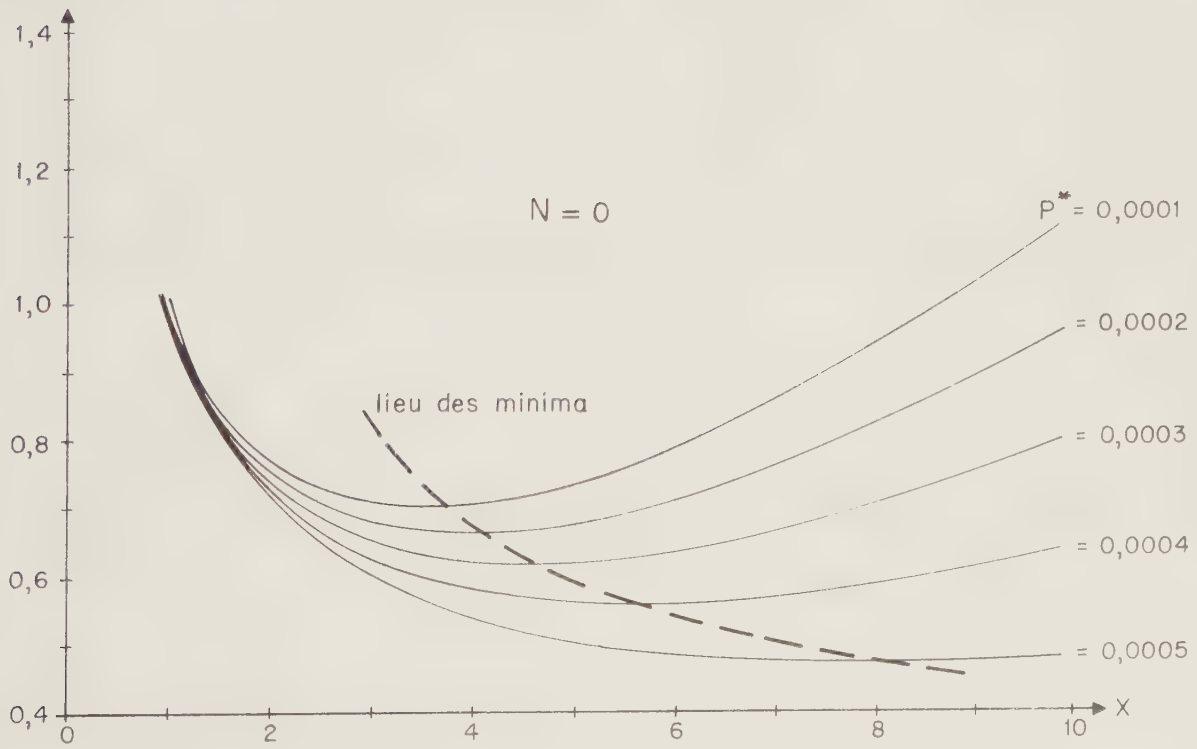
- Fig. 11 -

INFLUENCE D'UNE COMPOSANTE TRANSVERSALE IMPAIRE

VITESSE DÉFICITAIRE



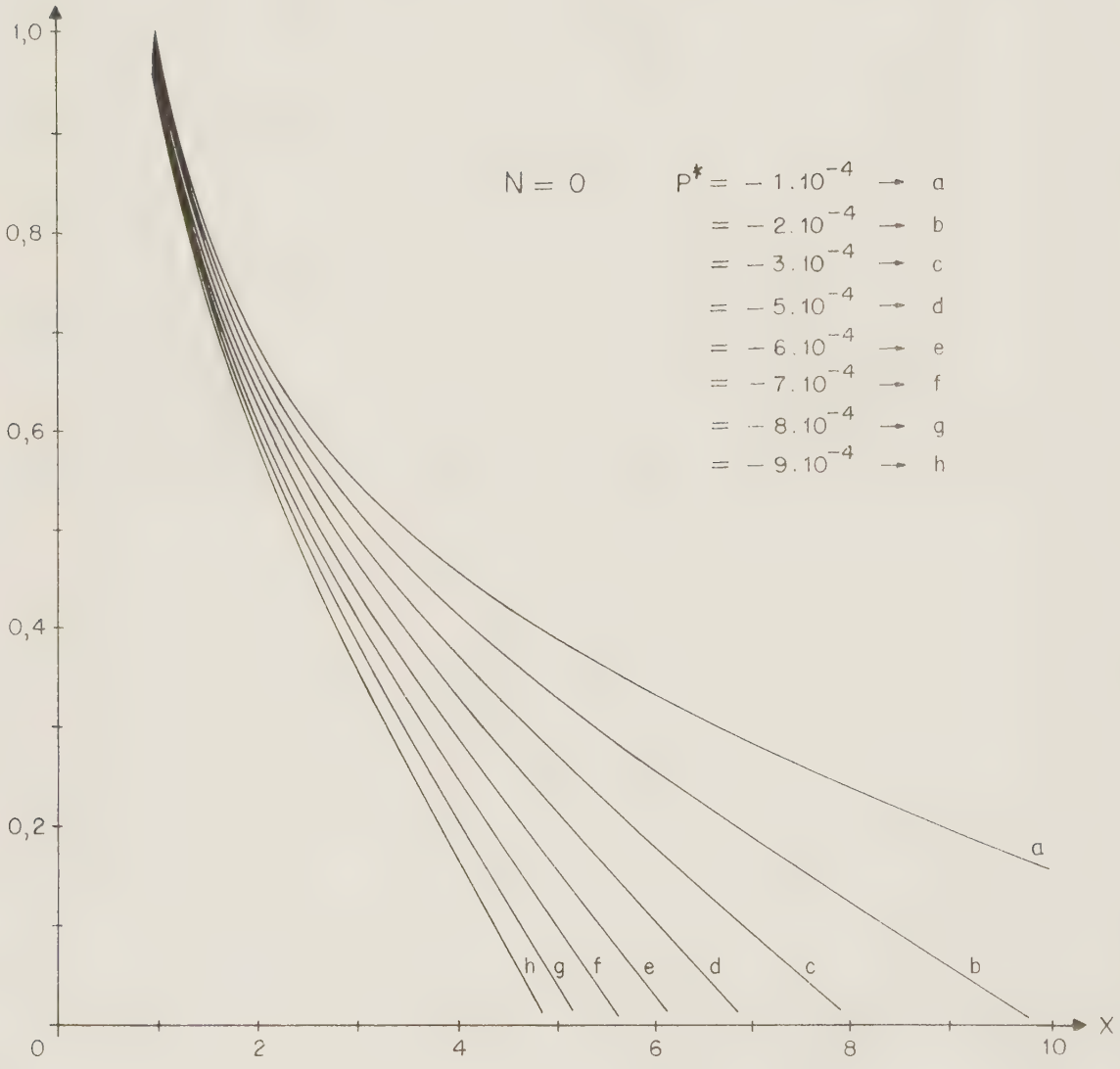
– Fig. 12 a –



– Fig. 12 b –

VITESSE DÉFICITAIRE SUR L'AXE :

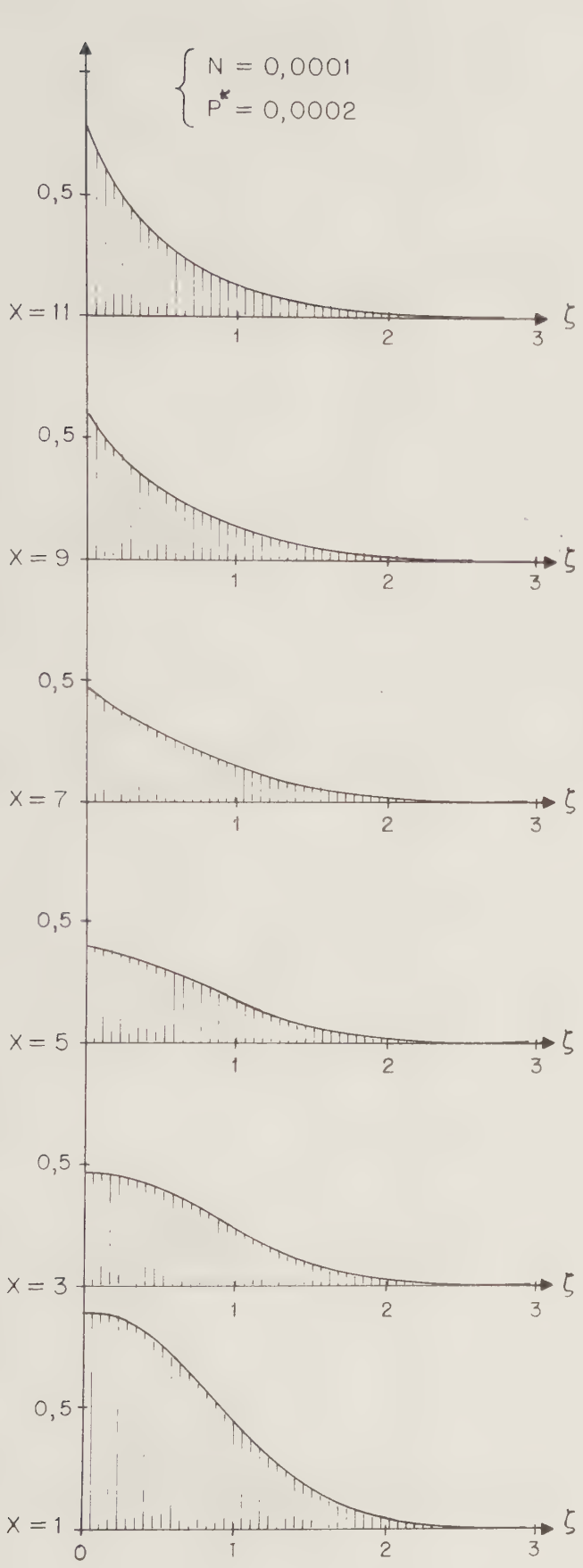
CAS D'UNE COMPOSANTE TRANSVERSALE NÉGATIVE



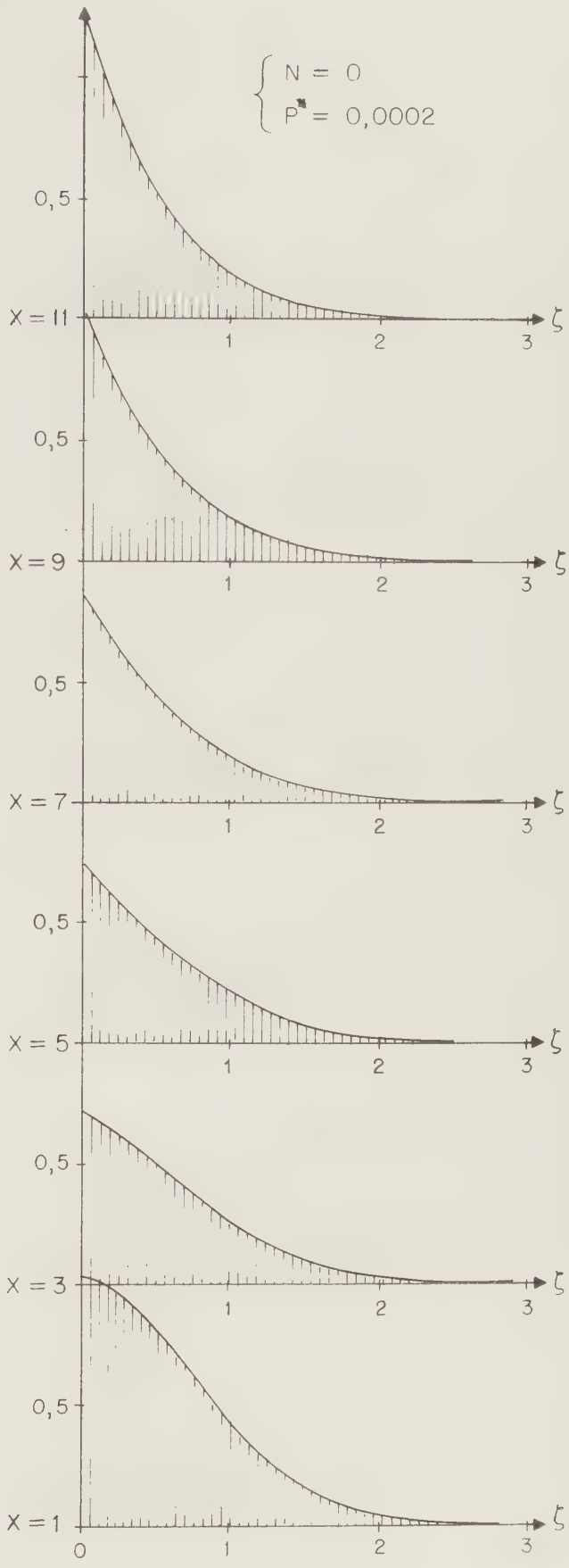
– Fig. 12 c –

INFLUENCE D'UNE COMPOSANTE TRANSVERSALE IMPAIRE

VITESSE DÉFICITAIRE



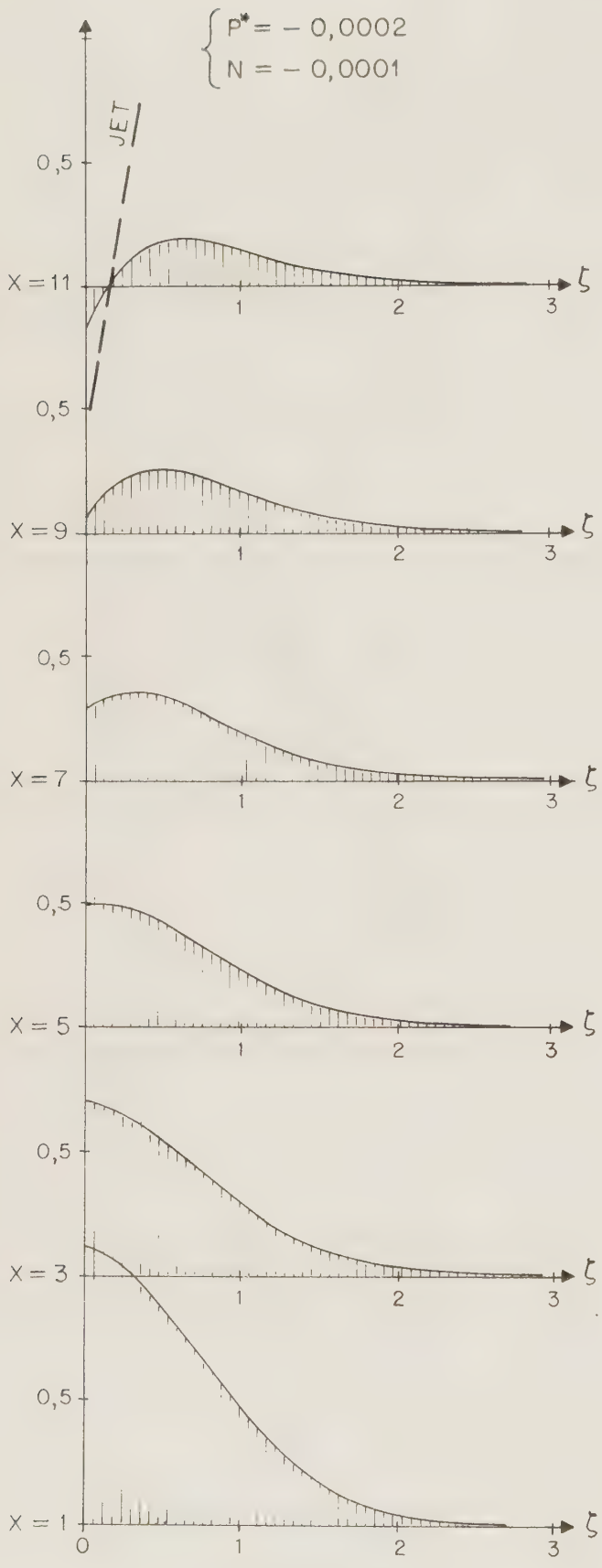
– Fig. 13 a –



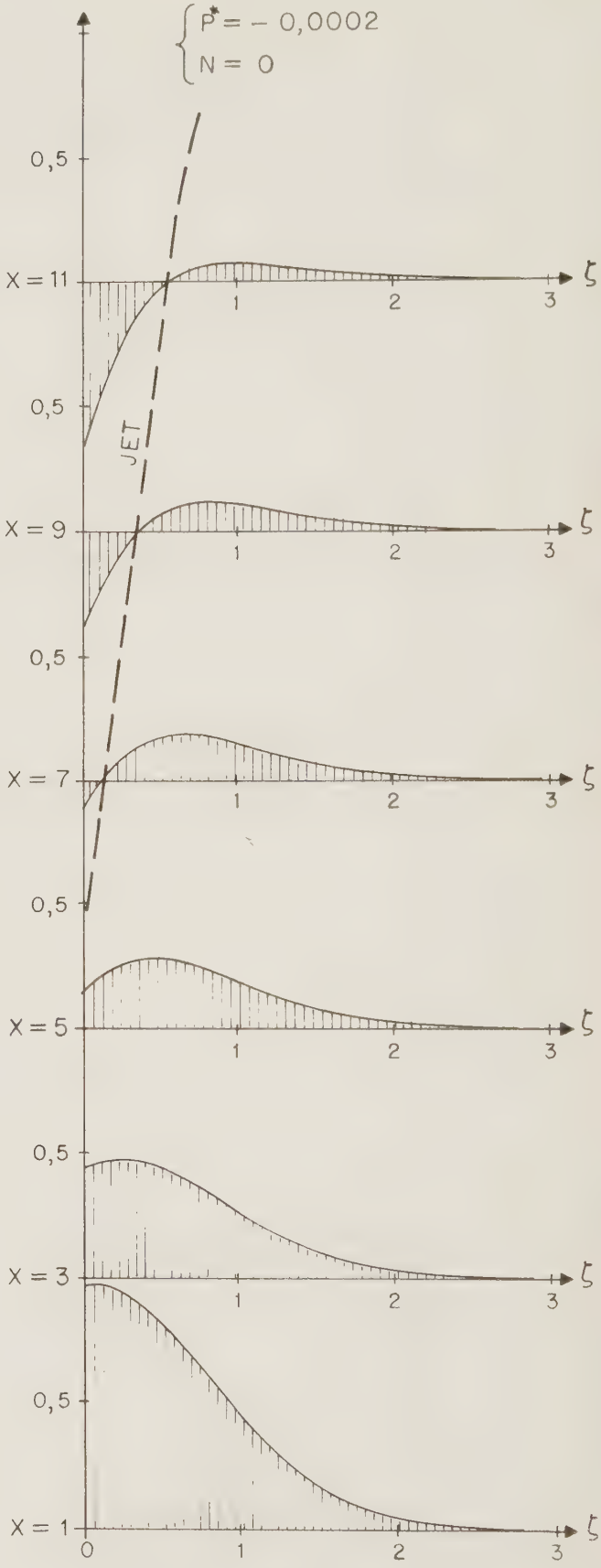
– Fig. 13 b –

VITESSE DÉFICITAIRE :

CAS D'UNE COMPOSANTE TRANSVERSALE NÉGATIVE



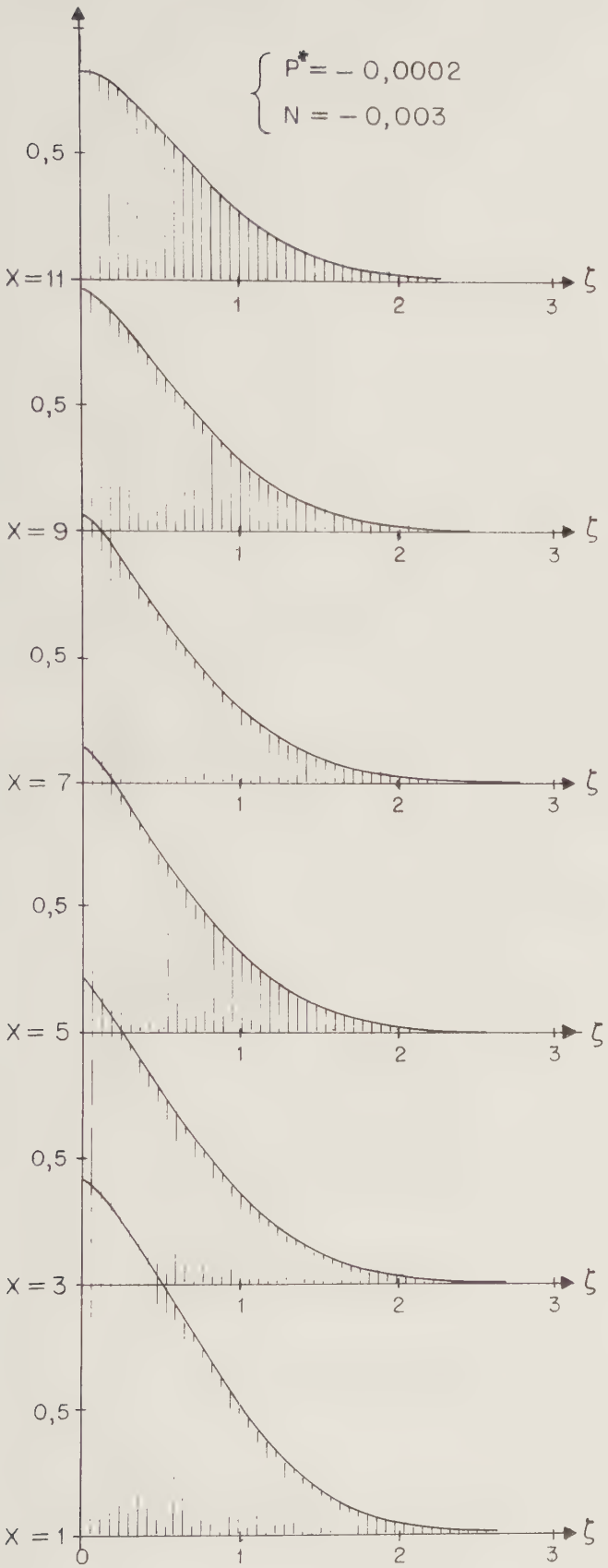
— Fig. 14 a —



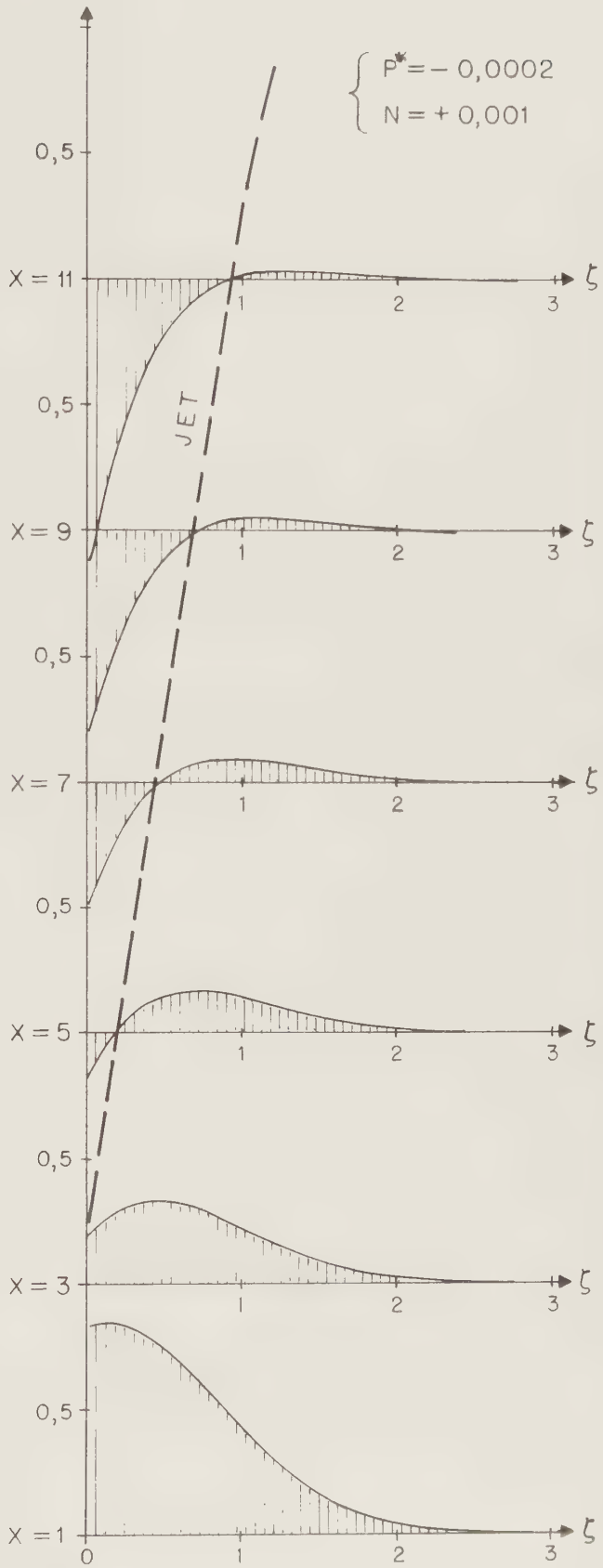
— Fig. 14 b —

VITESSE DÉFICITAIRE :

CAS D'UNE COMPOSANTE TRANSVERSALE NÉGATIVE



– Fig. 15 a –



– Fig. 15 b –

CHAPITRE III

THEORIE MIXTE

Dans le chapitre précédent, nous avons envisagé le cas où la vitesse déficitaire et la densité de charge étaient faibles et négligeables au second ordre. Il a été possible, en linéarisant les équations du mouvement et des charges, de faire une étude complète du problème. Des profils affinés des charges et des vitesses ont été obtenus, soit directement, soit par une superposition de solutions particulières.

Dans cette étape, la vitesse déficitaire est encore supposée faible mais la densité de charge quelconque. Ainsi l'équation du mouvement reste linéarisable, par contre il n'en est plus de même pour l'équation des charges.

Comme au chapitre précédent, nous examinons d'abord les effets du champ aligné et ensuite, ceux du champ muni d'une composante transversale impaire. La densité de charge n'étant plus supposée faible, il faut tenir compte du champ propre des charges. Le potentiel dû à celles-ci se déduit de l'équation de Poisson (I-2-8) et on a :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = -\frac{q_0 \delta^2}{\varepsilon} G'(\eta) \qquad (\text{III-1-1})$$

On peut écrire le potentiel sous la forme :

$$\varphi(x,\eta) = \varphi_0(x)\,\Pi(\eta) \qquad (\text{III-1-2})$$

avec :

$$\varphi_0(x) = -\frac{q_0 \delta^2}{\varepsilon} \qquad (\text{III-1-3})$$

$$\Pi(\eta) = \int_0^{\eta} G(\eta)\, d\eta \qquad (\text{III-1-4})$$

où :

$$\begin{cases} \Pi(0) = 0 & (III-1-5) \\ \Pi'(0) = 0 & (III-1-6) \end{cases}$$

et la composante e_y du champ propre des charges :

$$e_y = \frac{Q}{\varepsilon} G(\eta) \qquad (III-1-7)$$

La connaissance de la fonction $G(\eta)$ et des lois $q_0(x)$ et $\delta(x)$ permettra d'expliciter le potentiel et le champ des charges.

1 - Cas du champ aligné

Lorsque la composante transversale du champ appliqué est nulle, les équations (I-2-9) et (I-2-5) s'écrivent :

$$U \frac{\partial q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + K \frac{\partial}{\partial y}\left(q \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \qquad (III-1-8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) = \nu \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3} - \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - E_0\right)\right] \qquad (III-1-9)$$

Ces équations appellent quelques remarques : le gradient de pression transversal n'est pas nul comme dans le cas de faibles densités de charge. Ce gradient est égal à la composante transversale de la force de Coulomb (répulsion des charges de même signe). Les équations sont découplées et les termes en φ s'expriment en fonction de la densité de charge de telle manière que les deux inconnues restent la vitesse déficitaire et la densité de charge $q(x,y)$.

1-1 Affinité approchée du profil réduit des charges

Admettons que la distribution de la charge d'espace puisse encore être bien représentée par l'expression :

$$q = q_0(x)\, G'(y)$$

L'équation de la charge électrique (III-1-8) s'écrit en variables réduites :

$$\frac{(q_0\delta)'}{q_0\delta'} G' - (\eta G')' = \frac{D}{U\delta\delta'} G''' - \frac{K}{\varepsilon U}\frac{q_0\delta}{\delta'}(GG')' \qquad (III-1-10)$$

Intégrant globalement cette équation, il vient :

$$\frac{(q_0\delta)'}{q_0\delta'} G(\infty) = 0$$

d'où :

$$q_0\delta = Q_0$$

Le premier coefficient étant nul, l'équation (III-1-10) devient :

$$-(\eta G')' = \frac{D}{U\delta\delta'} G''' - \frac{K}{\varepsilon U} \frac{Q_0}{\delta'} (GG')' \qquad (III-1-11)$$

Les coefficients $\frac{D}{U\delta\delta'}$ et $\frac{K}{\varepsilon U} \frac{Q}{\delta'}$ ne sont pas indépendants de x à priori. Car si $\frac{D}{U\delta\delta'}$ était constant, on obtiendrait une loi $\delta(x)$ en $x^{1/2}$ et le coefficient $\frac{K}{\varepsilon U} \frac{Q_0}{\delta'}$ serait une fonction de x. Par ailleurs l'intégration globale de l'équation des charges indique que le coefficient $\frac{(q_0\delta)'}{q_0\delta'}$ est nul mais ne donne pas une relation permettant de relier les deux coefficients $\frac{D}{U\delta\delta'}$ et $\frac{K}{\varepsilon U} \frac{Q_0}{\delta'}$.

Cependant, écrivant (III-1-11) sur l'axe, il vient :

$$\frac{D}{U\delta\delta'} = \alpha_1 - \alpha_2 \frac{K}{\varepsilon U} \frac{Q_0}{\delta'} \qquad (III-1-12)$$

avec :

$$\alpha_1 = -\frac{G'(0)}{G'''(0)} \quad , \quad \alpha_2 = -\frac{G'(0)^2}{G'''(0)}$$

Remplaçons $\frac{D}{U\delta\delta'}$ par l'expression (III-1-12) dans l'équation (III-1-11) et intégrons. La constante d'intégration s'annule, il vient :

$$(\eta G' + \alpha_1 G'') - \frac{K}{\varepsilon U} \frac{Q_0}{\delta'} (\alpha_2 G'' + G'G) = 0 \qquad (III-1-13)$$

En annulant à la fois ces deux groupes de termes, on obtient deux équations séparées, chacune étant à coefficients constants :

$$\begin{cases} \eta G' + \alpha_1 G'' = 0 \\ \alpha_2 G'' + GG' = 0 \end{cases} \qquad (III-1-14)$$

Il est clair que dans le cas général, il n'est pas possible de trouver une solution satisfaisant simultanément à ces deux équations et aux conditions aux limites. Toutefois on remarque que les deux solutions respectives de ces équations qui sont :

$$G(\eta) = erf\left(\eta \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \qquad (III-1-15)$$

et :

$$G(\eta) = th(\eta) \qquad (III-1-16)$$

où l'on a choisi les normalisations :

$$\begin{cases} G'(0) = 1 \\ G(\infty) = 1 \end{cases} \qquad (III-1-17)$$

sont très voisines l'une de l'autre (Fi. 16). Nous admettons donc que l'affinité du profil réduit de la charge est satisfaite et, pour pouvoir nous référer au cas précédent, nous considérons que l'équation (III-1-12) est vérifiée par la solution :

$$G(\eta) = erf\left(\eta \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

et :
$$\begin{cases} G'(\eta) = e^{-\frac{\pi}{4}\eta^2} \\ \Pi(\eta) = \eta\, erf\left(\eta\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{4}\eta^2} - 1\right) \end{cases} \qquad (III-1-18)$$

Envisageons maintenant d'expliciter la loi de $\delta(x)$. La relation (II-1-12)

s'écrit :
$$\delta\delta' = \frac{KQ_o}{\varepsilon U}\left(\delta + \frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon D}{KQ_o}\right) \qquad (III-1-19)$$

ou bien :
$$\left[1 - \frac{\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon D}{KQ_o}}{\left(\delta + \frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon D}{KQ_o}\right)}\right]\delta' = \frac{KQ_o}{\varepsilon U} \qquad (III-1-20)$$

en intégrant par rapport à x et en tenant compte de la condition à la limite :
$$\delta(o) = 0 \qquad (III-1-21)$$

il vient :
$$\delta(x) = \frac{KQ_o}{\varepsilon U}\, x + \frac{\pi}{2}\frac{D\varepsilon}{KQ_o}\, Log\left|1 + \frac{2}{\pi}\frac{KQ_o}{D\varepsilon}\,\delta\right| \qquad (III-1-22)$$

ou encore :
$$\frac{\delta}{x}\frac{\varepsilon U}{KQ_o} = 1 + \frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon^2U^2}{K^2Q_o^2}\frac{D}{Ux}\, Log\left|1 + \frac{2}{\pi}\frac{\delta}{x}\frac{\varepsilon U}{KQ_o}\frac{K^2Q_o^2}{\varepsilon^2U^2}\frac{Ux}{D}\right| \qquad (III-1-23)$$

Posant :
$$\delta_1(x) = \frac{\delta}{x}\frac{\varepsilon U}{KQ_o}\ , \qquad \delta_2(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon^2U^2}{K^2Q_o^2}\frac{D}{Ux} \qquad (III-1-24)$$

(II-1-22) est de la forme :
$$\delta_1 = 1 + \delta_2\, Log\left|1 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right| \qquad (III-1-25)$$

ou bien :
$$\frac{1}{\delta_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} - Log\left|1 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right| \qquad (III-1-26)$$

Notons que δ_2 tend vers zéro avec le coefficient de diffusion D. De telle sorte que serait linéaire si la diffusion était négligée.

Avec les ordres de grandeurs suivantes :
$$K \simeq 10^{-8}\frac{m}{V_o}\ , \qquad \varepsilon \simeq 10^{-9}\frac{F}{m}$$
$$Q_o \simeq 10^{-3}\frac{C}{m^2}\ , \qquad U \simeq 1\frac{m}{o} \qquad (III-1-27)$$

on a :
$$\frac{KQ_o}{\varepsilon U} \simeq 10^{-2} \qquad (III-1-28)$$

δ_1 est de l'ordre de l'unité et avec un nombre de Peclet de 10^6, δ_2 est de l'ordre de 10^{-3} ; leur rapport $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ est de l'ordre de 10^{-3}. On remarquera que ce rapport est d'autant plus petit que l'injection de charges est forte.

Sur la figure (17), nous avons tracé le réseau des courbes $\frac{\delta}{h}\frac{\varepsilon U}{KQ_0}(X)$ donné par la relation (III-1-22). Il en résulte pour $X \geq 10^{-3}$ que le terme $\delta_2 \operatorname{Log}\left|1+\frac{\delta_1}{\delta_2}\right|$ est négligeable devant l'unité et que δ_2 tend vers l'unité. $\delta(x)$ est alors linéaire ; soit :

$$\delta(x) = \frac{Q_0 K}{\varepsilon U}\, x \qquad (III-1-29)$$

et on en déduit la loi de charge sur l'axe :

$$q_0(x) = \frac{\varepsilon U}{K x} \qquad (III-1-30)$$

A ce niveau, il est intéressant d'expliciter le potentiel (Fig. 8) et la composante transversale e_y. On a :

$$\varphi(x,\eta) = -\frac{Q_0^2 K}{\varepsilon^2 U}\, x\, \Pi(\eta) \qquad (III-1-31)$$

$$e_y = \frac{Q_0}{\varepsilon}\, G(\eta) \qquad (III-1-32)$$

Le potentiel dû aux charges varie linéairement avec x. Et lorsque η tend vers l'infini on a :

$$e_y(\infty) = \frac{Q_0}{\varepsilon} \qquad (III-1-33)$$

Cette composante est alors constante. On peut donc exprimer les lois $\delta(x)$ et $q_0(x)$ en fonction de $e_y(\infty)$ Soient en variables adimensionnelles :

$$\frac{\delta(x)}{h} = \frac{K e_y(\infty)}{U} X \quad (III-1-34) \; ; \quad \frac{q_0(x) h}{\varepsilon e_y(\infty)} = \frac{U}{K e_y(\infty)} \frac{1}{X} \qquad (III-1-35)$$

$\frac{K e_y(\infty)}{U}$ est le rapport de la vitesse relative des charges à la vitesse extérieure. Il apparaît que l'épaisseur $\delta(x)$ de la zone chargée est caractérisée par la mobilité et non par la diffusion lorsque la densité de charge n'est plus négligeable. Notons que le rapport entre l'épaisseur (II-2-23) caractéristique de la diffusion et celle de la mobilité (III-1-34) est de l'ordre de 10^{-1} à 10^{-2}. Ce qui indique que la diffusion n'est effectivement sensible que dans une zone mince (Fig. 19).

Les courbes représentatives de la distribution des charges sont tracées sur la figure (20). On peut notamment remarquer que la décroissance de la charge sur l'axe est plus rapide dans ce cas-ci que dans le cas de l'injection faible.

1-2 Etude des vitesses

L'équation de Poisson (I-2-8) permet de transformer le terme électrique

de l'équation (III-1-9) de la manière suivante, on a :

$$\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \qquad (III-1-34)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \qquad (III-1-35)$$

En faisant la différence membre à membre, on trouve :

$$\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] \qquad (III-1-36)$$

L'équation (III-1-9) s'écrit dans ces conditions :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[U\frac{\partial u_1}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right] = -\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{q}{\varepsilon}\left(E_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] \qquad (III-1-37)$$

Elle s'intégre par rapport à y et la constante d'intégration s'annule ; il vient :

$$U\frac{\partial u_1}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -\frac{\varepsilon}{\rho}\left[\frac{q}{\varepsilon}\left(E_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] \qquad (III-1-38)$$

Si l'on admet que la vitesse déficitaire peut être bien représentée par des profils affinés :

$$u_1 = u_0(x)\, F'(\zeta) \quad , \quad \zeta = \frac{y}{\beta x}$$

cette équation s'écrit :

$$\left[\frac{(u_0\beta)}{u_0\beta'}F' - (\zeta F')' - \frac{\nu}{U\beta\beta'}F'''\right] U\frac{u_0\beta'}{\beta} = -\frac{E_0 q_0}{\rho} G'\left[1 + \frac{Q\delta'}{\varepsilon E_0}\Pi(\eta)\right] \qquad (III-1-39)$$

Posant :

$$H_1(\eta) = G'(\eta)\left(1 + \frac{Q_0\delta'}{\varepsilon E_0}\Pi(\eta)\right) \qquad (III-1-40)$$

le théorème des quantités de mouvement donne :

$$(u_0\beta)' = -\frac{E_0 Q_0}{\rho U}\frac{\int_0^\infty H_1 d\eta}{F(\infty)} \qquad (III-1-41)$$

on en déduit :

$$u_0\beta = -\frac{E_0 Q_0}{\rho U}\frac{\int_0^\infty H_1 d\eta}{F(\infty)}\, x + c^{te} \qquad (III-1-42)$$

Compte tenu de (III-1-41) on peut écrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$\frac{E_0 q_0}{\rho U}\left[H_1(\eta) - \omega_1 \frac{\delta}{\beta} F'(\zeta)\right] - \frac{u_0}{\beta}\left[\beta'(\zeta F') + \frac{\nu}{U\beta}F'''\right] = 0 \qquad (III-1-43)$$

où la constante ω_1 a pour expression :

$$\omega_1 = \frac{\int_0^\infty H_1 d\eta}{F(\infty)} = \frac{1 + \frac{2}{\pi}(\sqrt{2}-1)\frac{Q_0^2 K}{\varepsilon^2 E_0 U}}{F(\infty)} \qquad (III-1-44)$$

Une superposition linéaire de solutions particulières comme au chapitre précédent ne ménerait pas à un résultat satisfaisant. Le théorème des quantités de mouvement ne suffit évidemment pas à lui seul pour déterminer les lois $u_0(x)$ et $\beta(x)$ On pourrait envisager d'analyser en toute rigueur l'équation (III-1-39) et examiner si l'hypothèse des profils de vitesse affinés est bien correcte. Or le seul examen de l'équation de la charge électrique nous a déjà amené à nous contenter d'une affini-

té approchée pour les profils de charge, de telle sorte que le second membre de cette équation est déjà lui-même une approximation. Il nous a semblé préférable, dans ces conditions, de nous limiter à rechercher et à mettre en évidence les possibilités les plus nettes d'affinité des profils de vitesse. Nous avons vu dans le chapitre précédent que les effets électriques sur la vitesse déficitaire sont surtout appréciables dans la zone chargée dont la largeur varie comme $\delta(x)$. Convenons donc d'emblée de nous limiter à rechercher des indications sur la vitesse au centre du sillage, là où ses effets électriques sont le plus fortement marqués. Il est alors naturel de lier la loi d'élargissement du sillage à la loi d'élargissement de la zone chargée et de prendre :

$$\beta(x) = \delta(x)$$
$$\zeta = \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

On déduit directement de (III-1-43) :

$$u_0(x) = -\frac{\varepsilon E_0}{\rho K}\,\omega_1 + \frac{C_{xd}}{4}\,\frac{\varepsilon U^2}{Q_0 K}\,\frac{1}{x} \qquad (III-1-45)$$

ou bien :

$$\frac{u_0(x)}{U} = \omega_1 M^2 R\left(-1 + \frac{m}{\omega_1 N}\,\frac{1}{X}\right) \qquad (III\ 1-46)$$

Les notations m, N et X sont les mêmes que précédemment (II-2-37) et :

$$M = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} \quad , \quad R = \frac{KE_0}{U} \qquad (III-1-47)$$

R mesure l'importance relative de la vitesse des charges dans le champ E_0 à la vitesse extérieure. $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}$ introduite par FELICI [6] est une mobilité hydrodynamique indépendante du champ électrique et des charges ; elle provient de l'entraînement des charges par le fluide. Le nombre M est le rapport de cette mobilité $\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^{1/2}$ à la mobilité vraie K.

L'expression (III-1-46) montre que la vitesse déficitaire s'annule sur l'axe et devient excédentaire comme dans le cas de faibles densités de charges. En outre, lorsque $X \gg \frac{m}{\omega_1 N}$, c'est-à-dire dans la zone du jet, cette vitesse tend vers une limite finie : (Fig. 21).

$$\frac{u_0 \text{ limite}}{U} = -M^2 R \qquad (III-1-48)$$

Cette vitesse limite est proportionnelle à la vitesse des charges KE_0 mais ne lui est pas égale. Bien entendu cette limite est nulle dans le cas du sillage classique.

Revenons à l'équation du mouvement pour contrôler l'hypothèse d'affinité. On a :

$$(u_0\beta)' F' - u_0\left[\beta'(\zeta F')' + \frac{\nu}{U}\,\frac{1}{\beta}\,F'''\right] = -\frac{E_0 Q_0}{\rho U}\,H_1(\eta) \qquad (III-1-49)$$

ou bien, en remplaçant $(u_0\beta)'$ par sa valeur déduite de (III-1-41) :

$$\frac{E_0 Q_0}{\rho U}\left(-\omega_1 F' + H_1\right) = \left(-\omega_1 \frac{\varepsilon E_0}{\rho K} + m \frac{\varepsilon U^2}{Q_0 K}\frac{1}{X}\right)\left[\frac{K Q_0}{\varepsilon U}(\eta F')' + \frac{\varepsilon U}{K Q_0}\frac{\nu}{Uh}\frac{1}{X}F'''\right]$$

En simplifiant les deux membres par $\frac{E_0 Q_0}{\rho U}$ cette équation devient : (III-1-50)

$$-\omega_1 F' + H_1 = \omega_1\left(-1 + \frac{m}{\omega_1 N}\frac{1}{X}\right)\left[(\eta F)' + \frac{\varepsilon^2 U^2}{K^2 Q_0^2}\frac{\nu}{Uh}\frac{F'''}{X}\right] \qquad (III-1-51)$$

Il est évident qu'il ne peut exister une solution affine dans le cas général. Toutefois lorsque l'on choisit une courbe en cloche du type :

$$F' = a e^{-b\eta^2} \qquad (III-1-52)$$

on trouve que F''' et $(\eta F')'$ sont proportionnelles ; on a :

$$F''' = -2b(\eta F')' \qquad (III-1-53)$$

Dès lors l'équation du mouvement (III-1-51) peut s'écrire :

$$-\omega_1 F' + H_1 = \omega_1\left(-1 + \frac{m}{\omega_1 N}\frac{1}{X}\right)\left[1 - 2b\frac{\varepsilon^2 U^2}{K^2 Q_0^2}\frac{\nu}{Uh}\frac{1}{X}\right](\eta F')' \qquad (III-1-54)$$

On constate qu'il y a deux abscisses singulières : celle qui annule la vitesse déficitaire sur l'axe :

$$X_1 = \frac{m}{\omega_1 N} \qquad (III-1-55)$$

et celle qui annule le terme entre crochet :

$$X_2 = 2b\frac{\varepsilon^2 U^2}{K^2 Q_0^2}\frac{\nu}{Uh} \qquad (III-1-56)$$

L'abscisse X2 de l'ordre de quelques dizaines d'unités, est supérieure à l'abscisse X1. Cependant l'abscisse X1 peut devenir plus grande que l'abscisse X2 si le champ Eo est très faible.

Considérons le cas limite où $X \gg X_1$. Ce cas particulier est intéressant puisqu'il correspond à la zone où la vitesse peut devenir excédentaire (jet). Annulant les termes en 1/X très petits, l'équation du mouvement (III-1-54) se simplifie considérablement et on obtient :

$$F' - \frac{1}{\omega_1} H_1 = (\eta F')' \qquad (III-1-57)$$

Une identification élémentaire des courbes $F' - \frac{1}{\omega_1} H_1$ et $(\eta F')'$ permet de déterminer a, b.

Avec a égal à l'unité et b égal à $\frac{\pi}{4}$ on constate que ces courbes sont très voisines l'une de l'autre (Fig. 22). Autrement dit le profil réduit de vitesse

déficitaire :

$$F' = e^{-\frac{\pi}{4}\eta^2}$$

est une bonne approximation des vitesses réelles dans la zone considérée.

1-3 Conclusion

Malgré les difficultés apparues, dues à l'injection de densités de charges non négligeables, une affinité approchée du profil de charge a été mise en évidence. Le profil réduit n'est pas modifié par l'injection et reste conforme à la courbe de Gauss obtenue dans les études précédentes. Par contre on constate que la largeur de la zone chargée est très sensible à l'injection. Cette zone s'élargit plus vite, du moins à quelque distance du corps, dans le cas présent que dans le cas d'une injection de faibles densités de charges ; ce n'est plus alors la diffusion mais la mobilité propre des charges qui est déterminante en ce qui concerne l'élargissement de cette zone. A ce propos, il est intéressant de retourner à la seconde partie du chapitre précédent. Il y était envisagé une injection de faibles densités de charges en présence d'un champ appliqué muni d'une composante transversale impaire. L'influence de la mobilité allait alors dans le sens de l'élargissement de la zone chargée. Mais cette influence était encore faible pour masquer complètement l'effet de la diffusion. Nous trouvons que la mobilité n'a de l'effet que lorsque les densités de charges et par suite leurs champs propres, sont importants.

En ce qui concerne la vitesse, nous avons limité notre étude à la région du jet. En effet la complexité accrue de l'équation du mouvement ne permet pas de trouver une expression simple du profil de vitesse déficitaire valable partout dans le sillage. Il faut se situer à de grandes abscisses dans la région du jet, pour que l'hypothèse d'affinité soit satisfaisante. Dans cette région, la vitesse sur l'axe devenue excédentaire tend vers une limite constante qui dépend de la mobilité relative dans le champ aligné.

2 - Influence d'une composante transversale

Les équations de base (I-2-9) et (I-2-5) s'écrivent :

$$U\frac{\partial q}{\partial x} = D\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + K\frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial \varphi}{\partial y} - P_0 q y\right) \qquad (\text{III-2-1})$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[U\frac{\partial u_1}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right] = -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - E_0\right) - P_0\left(\frac{\partial q}{\partial x}y + \frac{\partial q}{\partial y}x\right)\right]$$

$$(\text{III-2-2})$$

2-1 Equation de la charge

En variables réduites l'équation de la charge (III-2-1) devient :

$$\frac{(q_0\delta)'}{q_0\delta'}\,G' - \frac{D}{U\delta\delta'}\,G''' = \left(1 - \frac{KP_0\delta}{U\delta'}\right)(\eta G')' - \frac{Kq_0\delta}{\varepsilon U\delta'}\,(G'G)' \qquad (III-2-3)$$

L'intégration globale de cette équation montre, comme précédemment que la charge totale à travers une section est invariante :

$$\frac{(q_0\delta)'}{q_0\delta'}\,G(\infty) = 0 \qquad (III-2-4)$$

et :

$$q_0\delta = Q_0 \qquad (III-2-5)$$

Le premier coefficient étant nul, on obtient :

$$-\frac{D}{U\delta\delta'}\,G''' = \left(1 - \frac{KP_0\delta}{U\delta'}\right)(\eta G')' - \frac{KQ_0}{\varepsilon U\delta'}\,(G'G)' \qquad (III-2-6)$$

ou bien :

$$-\frac{\varepsilon D}{KQ\delta}\,G''' = \left(\frac{\varepsilon U\delta'}{KQ_0} - \frac{\varepsilon P_0\delta}{Q_0}\right)(\eta G')' - (GG')' \qquad (III-2-7)$$

Les coefficients $\frac{\varepsilon D}{KQ_0\delta}$ et $\left(\frac{\varepsilon U\delta'}{KQ_0} - \frac{\varepsilon P_0}{Q_0}\delta\right)$ ne sont pas constants. Cependant la valeur de l'équation (III-1-7) sur l'axe permet encore de trouver une relation entre ces deux coefficients ; on obtient :

$$\frac{\varepsilon D}{KQ_0\delta} = -\alpha_3 + \alpha_4\left(\frac{\varepsilon U\delta}{KQ_0} - \frac{\varepsilon P_0\delta}{Q_0}\right) \qquad (III-2-8)$$

Un raisonnement identique à celui du paragraphe précédent donne encore le profil approché :

$$G'(\eta) = e^{-\frac{\pi}{4}\eta^2} \qquad (III-2-9)$$

avec :

$$\alpha_3 = \frac{2}{\pi} \quad , \quad \alpha_4 = -\frac{2}{\pi} \qquad (III-2-10)$$

la relation (III-1-8) peut s'ecrire :

$$\delta\delta' = \frac{\pi}{2}\frac{D}{U} + \frac{KQ_0}{\varepsilon U}\,\delta + \frac{KP_0}{U}\,\delta^2 \qquad (III-2-11)$$

ou en variables adimensionnelles :

$$\delta_*\delta_*' = P_i + v\delta_* + \mu\delta_*^2 \qquad (III-2-12)$$

en notant :

$$\begin{cases} \delta_* = \dfrac{\delta}{h} \quad , \quad P_i = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{D}{Uh} \\ \mu = \dfrac{KP_0h}{U} \quad , \quad v = \dfrac{KQ_0}{\varepsilon U} \end{cases} \qquad (III-2-13)$$

L'équation (III-1-12) s'intègre aisément et on obtient :

$$X = \mathrm{Log}\left| \left(\frac{r}{\rho_i}\right)^{1/2\mu} \left[\frac{(\mathcal{K}+r_1)(2\mu\mathcal{K}-\mathcal{V})}{(\mathcal{K}-r_1)(2\mu\mathcal{K}+\mathcal{V})}\right]^{\mathcal{V}/2\mathcal{K}\mu^2} \right| \qquad (\text{III}-2-14)$$

où :

$$\begin{cases} r = \rho_i + \mathcal{V}\delta_* + \mu\delta_*^2 \\ r_1 = \delta_* + \dfrac{\mathcal{V}}{2\mu} \\ \mathcal{K} = \dfrac{\mathcal{V}^2}{4\mu^2}\,\dfrac{\rho_i}{\mu} \end{cases} \qquad (\text{III}-2-15)$$

Les nombres ρ_i, $\mathcal{V}$ et μ sont respectivement de l'ordre de 10^{-6}, 10^{-2} et 10^{-2}. A une distance finie assez faible le terme de diffusion est négligeable devant les termes de mobilité dans l'équation (III-1-12) et la solution que l'on obtient est :

$$\delta_* = \frac{\mathcal{V}}{\mu}\left(e^{\mu X} - 1\right) \qquad (\text{III}-2-16)$$

ou bien en développant :

$$\delta_* = \mathcal{V}X\left(1 + \frac{\mu}{2}X + \frac{\mu^2}{6}X^2 + \cdots\right) \qquad (\text{III}-2-17)$$

De cette première approximation, il apparaît que l'évolution de la zone chargée dépend de la mobilité et de la composante transversale du champ appliqué. On remarquera, dans ce chapitre, comme dans celui qui précède, que l'influence de la composante transversale se traduit par un élargissement de la zone chargée. La diffusion peut être importante au voisinage du corps mais dès qu'on s'éloigne de celui-ci, la mobilité suffit à elle seule pour contrôler l'épaisseur de la zone chargée.

Pour étudier la distribution des vitesses, il semble nécessaire d'avoir une loi de $\delta(x)$ plus simple. Donc une seconde approximation de δ_* s'impose ; elle consiste à considérer que l'influence de la composante transversale demeure faible, de telle sorte que les termes en μ dans la relation (IV-2-26) soient négligeables devant l'unité. On obtient une loi de $\delta(x)$ linéaire en x, identique à celle du cas précédent. Soit :

$$\delta(x) = \frac{K Q_0}{\varepsilon U} \, x \qquad (III-2-18)$$

Nous avons vu que cette approximation est justifiée jusqu'à des valeurs très grandes de Po.

2-2 Etude des vitesses

L'équation de Poisson (I-2-8) permet d'exprimer le second membre de l'équation (III-2-2) en fonction du potentiel φ des charges et du champ appliqué, et de faire apparaître ainsi une dérivée par rapport à y. Dès lors cette équation (III-2-2) s'intègre par rapport à y. Les conditions à l'extérieur du sillage montrent que la constante d'intégration est nulle et on obtient l'équation du mouvement qui s'écrit en variables réduites :

$$\left[\frac{(u_0\beta)'}{u_0\beta'} F' - (\eta F')' - \frac{\nu}{U\beta\beta'} F'''\right] \frac{U u_0 \beta'}{\beta} =$$

$$- \frac{E_0 q_0}{\rho} G' \left\{1 + \frac{Q_0 \delta'}{\varepsilon E_0} \Pi(\eta) - \frac{P_0 x}{E_0} + \frac{P_0 Q_0}{E_0 q_0} \delta' \left(\eta^2 + \frac{2}{\pi}\right)\right\}$$

(III-2-19)

Comme précédemment nous n'allons pas chercher une affinité rigoureuse des profils de vitesses. Nous nous contentons de chercher une solution affine dans les régions éloignées du corps où la vitesse déficitaire a changé de signe, autrement dit, dans la zone du jet. De même nous prenons $\beta(x)$ égal à $\delta(x)$. L'équation du mouvement (III-2-28) peut s'écrire alors :

$$(u_0\beta)' F' - u_0\beta' (\eta F')' - \frac{\nu}{U} \frac{u_0}{\beta} F''' = - \frac{E_0 Q_0}{\rho U} H_1(\eta) - \frac{P_0 Q_0}{\rho U} x \, H_2(\eta)$$

(III-2-20)

où :

$$H_2(\eta) = \left[-1 + \frac{Q_0^2 K^2}{\varepsilon^2 U^2} \left(\eta^2 + \frac{2}{\pi} \right) \right] G'(\eta) \qquad (III-2-21)$$

Notons que la nouveauté par rapport au cas précédent est due au terme en Po.

Le théorème des quantités de mouvement conduit à la relation suivante :

$$(u_0 \beta)' = -\omega_1 \frac{E_0 Q_0}{\rho U} - \omega_2 \frac{P_0 Q_0}{\rho U} x \qquad (III-2-22)$$

avec :

$$\omega_2 = \frac{\int_0^\infty H_2 \, d\eta}{F(\infty)} = \frac{-1 + \frac{4}{\pi} \frac{K^2 Q^0}{\varepsilon^2 U^2}}{F(\infty)} \qquad (III-2-23)$$

l'équation (III-2-22) s'intègre et donne le débit déficitaire :

$$u_0 \beta = c^{te} - \omega_1 \frac{E_0 Q_0}{\rho} x - \frac{\omega_2}{2} \frac{P_0 Q_0}{P U} x^2 \qquad (III-2-24)$$

La valeur de la constante d'intègration est connue ; et compte tenu de la valeur de β , on peut écrire la vitesse $u_0(x)$; en grandeurs adimensionnelles, il vient :

$$\frac{u_0(x)}{U} = \omega_1 M^2 R \left(-1 + \frac{m}{\omega_1 N} \frac{1}{X} - \frac{\omega_2}{2\omega_1} \frac{P^*}{N} X \right) \qquad (III-2-25)$$

les nombres m, M, R, N, et P^* étant les mêmes que ceux introduits précédemment.

Les courbes de cette vitesse rapportée au terme de mobilité sont tracées sur les figures (23a, 23b) dans la région du jet. Ces courbes indiquent que la vitesse excédentaire tend vers une limite finie lorsque l'injection des charges est très forte et lorsque le champ transversal est assez faible.

Le cas limite où X est très grand devant $\frac{m}{\omega_1 N}$ donne une vitesse limite entièrement négative mais non constante. Soit :

$$\frac{u_o}{U}\ \text{limite} = -\omega_1 M^2 R\left(1+\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{P^*}{N}X\right) \qquad (III-2-26)$$

Cette vitesse dépend de la vitesse relative des charges et du champ appliqué.

A ce niveau, il importe de revenir à l'équation du mouvement (III-2-20) pour contrôler l'hypothèse d'affinité. Compte-tenu du théorème des quantités de mouvement (III-2-22) cette équation s'écrit :

$$\frac{E_o Q_o}{\rho U}\left\{\left(-\omega_1 F' + H_1\right) + \omega_1\left(1-\frac{m}{\omega_1 N}\frac{1}{X}\right)\left[(\eta F')' + \frac{\varepsilon^2 U^2}{Q_o^2 K^2}\frac{\nu}{Uh}\frac{1}{X}F'''\right]\right\}$$

$$+\frac{P_o Q_o}{\rho U}X\left\{\left(-\omega_2 F' + H_2\right) + \frac{\omega_2}{2}\left[(\eta F')' + \frac{\varepsilon^2 U^2}{Q_o^2 K^2}\frac{\nu}{Uh}\frac{1}{X}F'''\right]\right\} = 0$$

$$(III-2-27)$$

Considérons à nouveau une courbe en cloche du type : $F' = a e^{-b\eta^2}$. F''' s'exprime alors en fonction de $(\eta F')'$ et l'équation du mouvement devient :

$$\frac{E_0 Q_0}{\rho U}\left\{(-\omega_1 F' + H_1) + \omega_1\left(1 - \frac{m}{\omega_1 N}\frac{1}{X}\right)\left(1 - 2b\,\frac{\varepsilon^2 U^2}{Q_0^2 K^2}\,\frac{\nu}{Uh}\,\frac{1}{X}\right)(\eta F')'\right\}$$

$$+\frac{P_0 Q_0}{\rho U}\,x\left\{(-\omega_2 F' + H_2) + \frac{\omega_2}{2}\left[1 - 2b\,\frac{\varepsilon^2 U^2}{Q^2 K^2}\,\frac{\nu}{Uh}\,\frac{1}{X}\right](\eta F')'\right\} = 0 \qquad \text{(III-2-28)}$$

on retrouve les mêmes abscisses singulières X1 et X2 (III-1-55) et (III-1-56) obtenues dans le cas précédent du champ aligné. Et, comme dans ce cernier cas, limitons-nous à étudier l'équation ci-dessus dans la zone du jet où les termes en $\frac{1}{X}$ sont négligeables. Il vient :

$$\frac{E_0 Q_0}{\rho U}\left[-\omega_1 F' + H_1 + \omega_1 (\eta F')'\right] + \frac{P_0 Q_0 x}{\rho U}\left[-\omega_2 F' + H_2 + \frac{\omega_2}{2}(\eta F')'\right] = 0 \qquad \text{(III-2-29)}$$

Ces deux groupes de termes s'annulent simultanément si le profil de vitesse satisfait aux deux conditions :

$$\begin{cases} F' - \dfrac{1}{\omega_1} H_1 = (\eta F')' & \text{(III-2-30)} \\[2ex] 2F' - \dfrac{2}{\omega_2} H_2 = (\eta F')' & \text{(III-2-31)} \end{cases}$$

La première équation est celle obtenue précédemment dans le cas du champ aligné. Il suffit donc de voir s'il est possible de faire coïncider les courbes $2F' - \frac{2}{\omega_2} H_2$ et $(\eta F')'$ le profil étant $F' = e^{-\frac{\pi}{4}\eta^2}$. On constate que cela n'a lieu que pour des valeurs de $\frac{K Q_0}{\varepsilon U}$ de l'ordre de 10 c'est-à-dire pour des injections de charges

assez fortes (Fig. 24). Notons que ce fait n'est pas contradictoire avec les approximations faites sur la loi de l'épaisseur $\delta(x)$ du paragraphe précédent ; au contraire, il les justifie davantage.

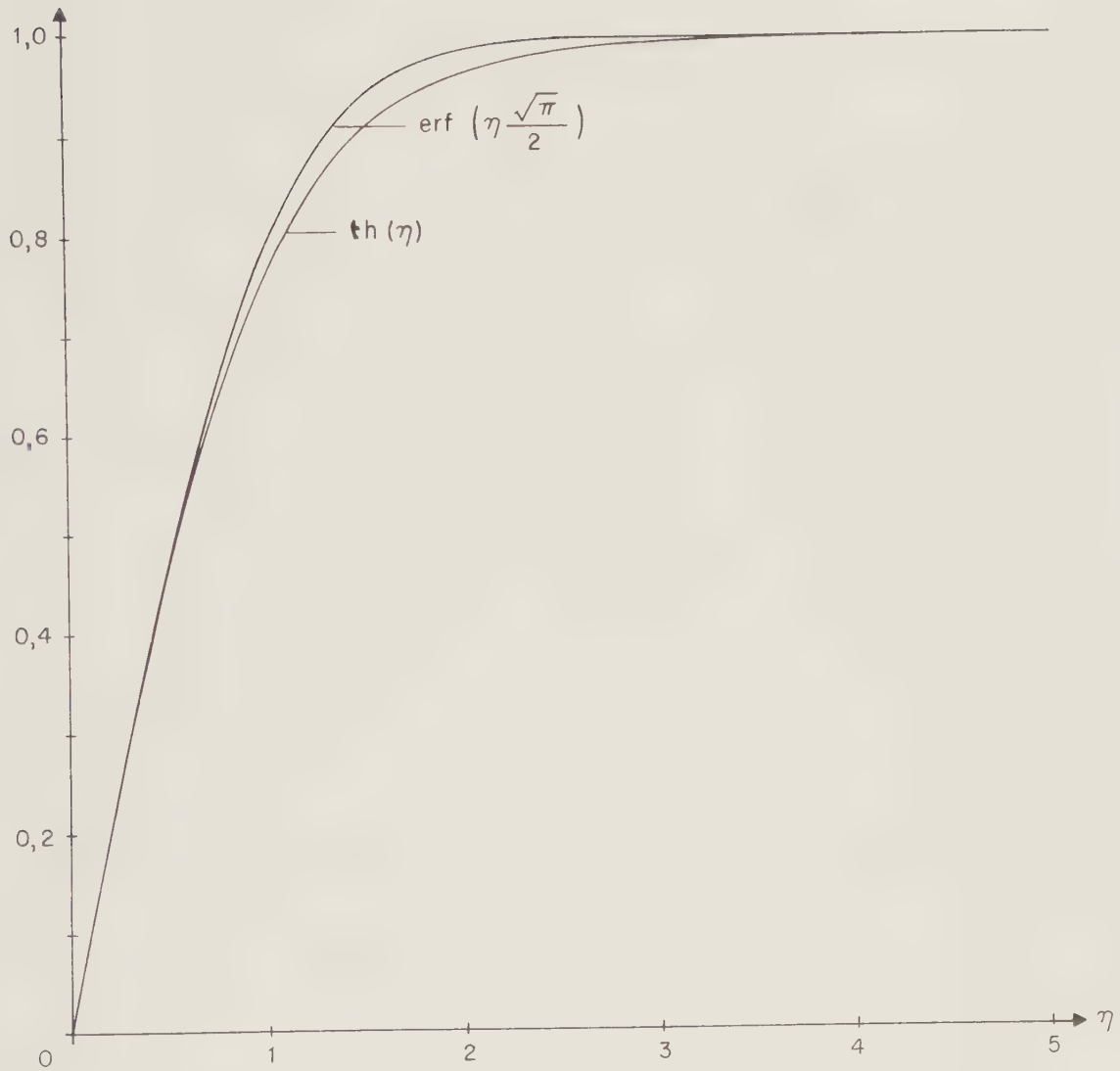
2-3 Conclusion

L'influence de la composante transversale du champ, dans le cas présent comme celui d'une injection de faibles densités de charges, consiste à élargir la couche chargée.

Il existe un profil approché de charge et ceci pour l'ensemble du sillage. Mais il faut se placer dans la zone du jet pour obtenir un profil réduit de vitesse excédentaire.

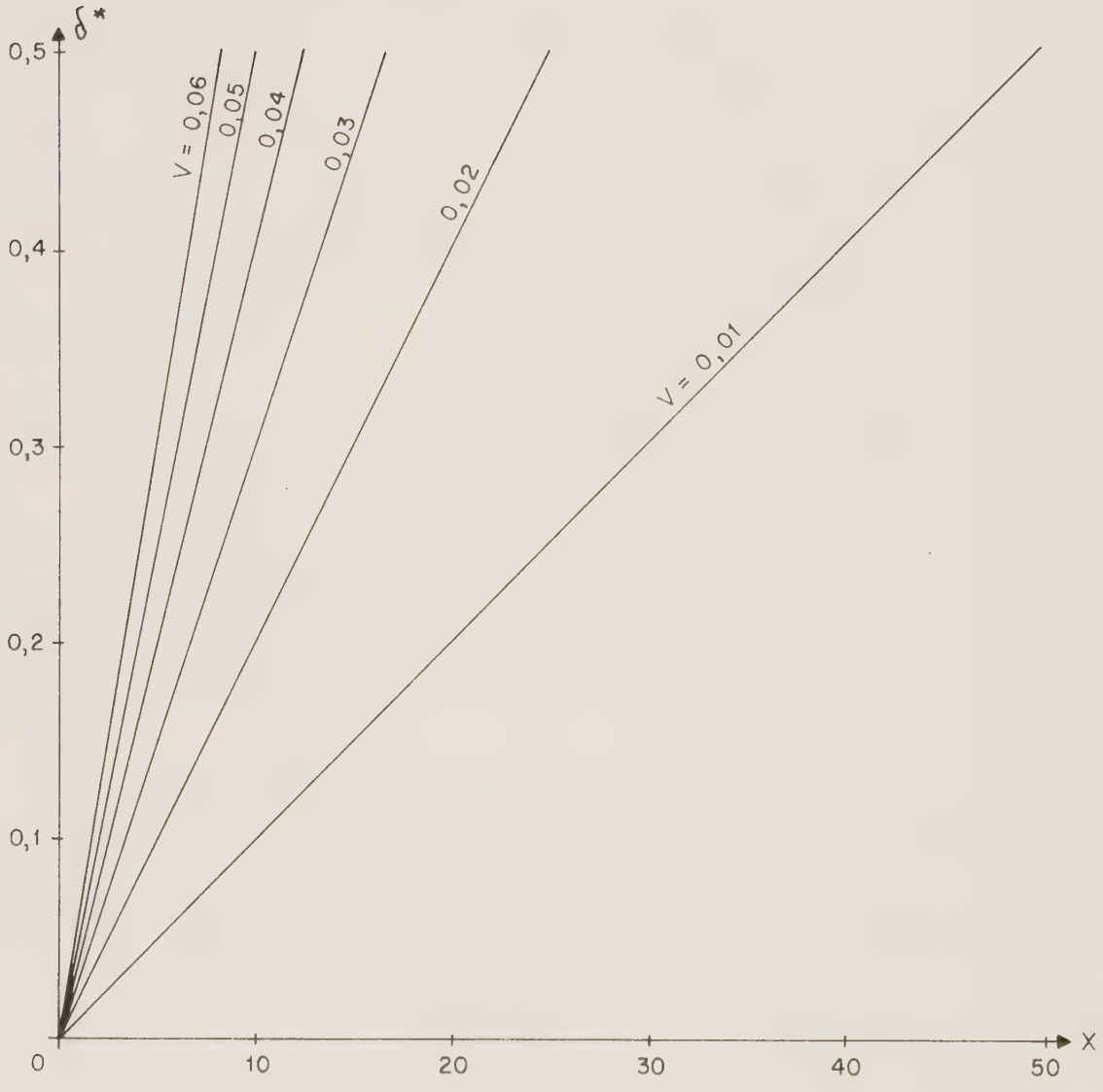
En fait, l'introduction d'une composante transversale n'apporte pas de grandes modifications par rapport au champ aligné. Lorsque les densités de charges ne sont plus négligeables leur champ électrique est suffisant pour contrôler l'élargissement de la couche chargée. Ainsi donc nous n'envisagerons que le cas du champ aligné dans le chapitre suivant.

Il est possible de faire quelques remarques concernant les études faites jusqu'à présent. On observe que l'évolution de la charge peut être étudiée indépendamment de la vitesse déficitaire lorsque celle-ci est faible. Quant au sillage lui-même il est tributaire non seulement de l'injection de charges mais aussi du champ électrique appliqué. Mais l'information essentielle pour la suite, est que les profils affines de charge et de vitesse, s'ils existent, peuvent être approchés par des courbes en cloche voisines de la courbe de Gauss.

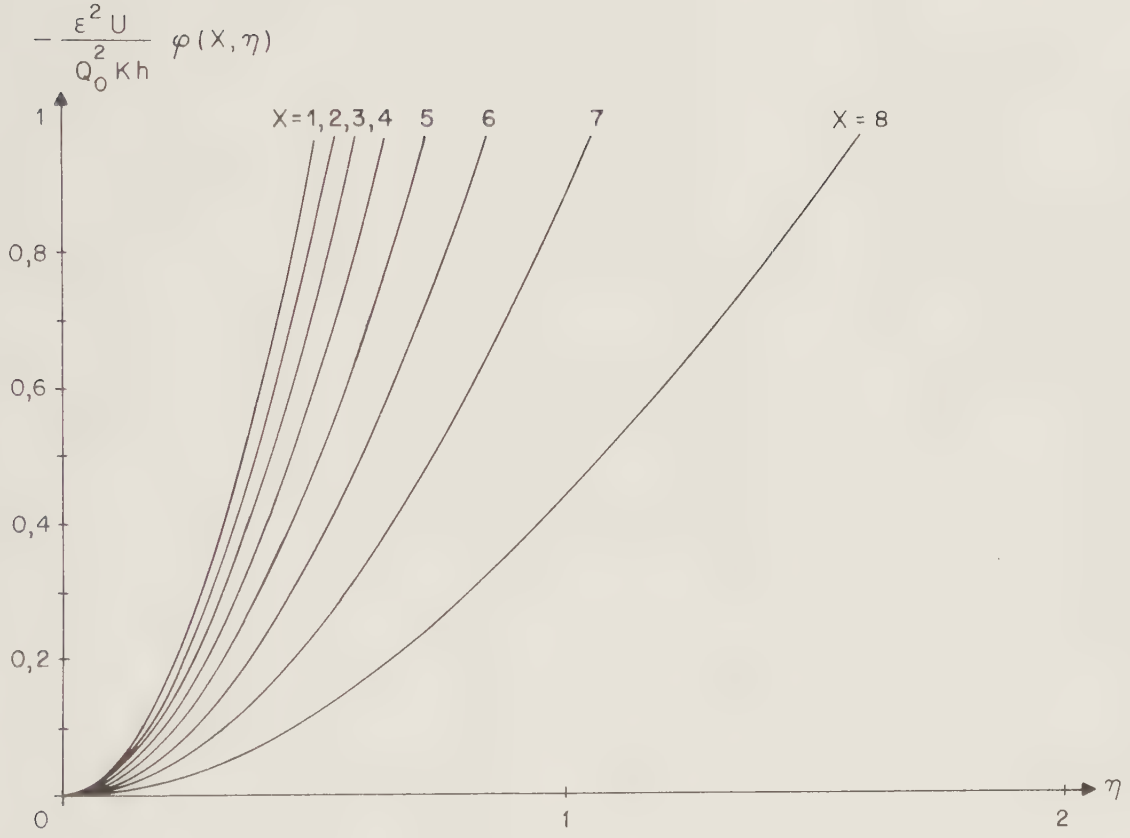


– Fig. 16 –

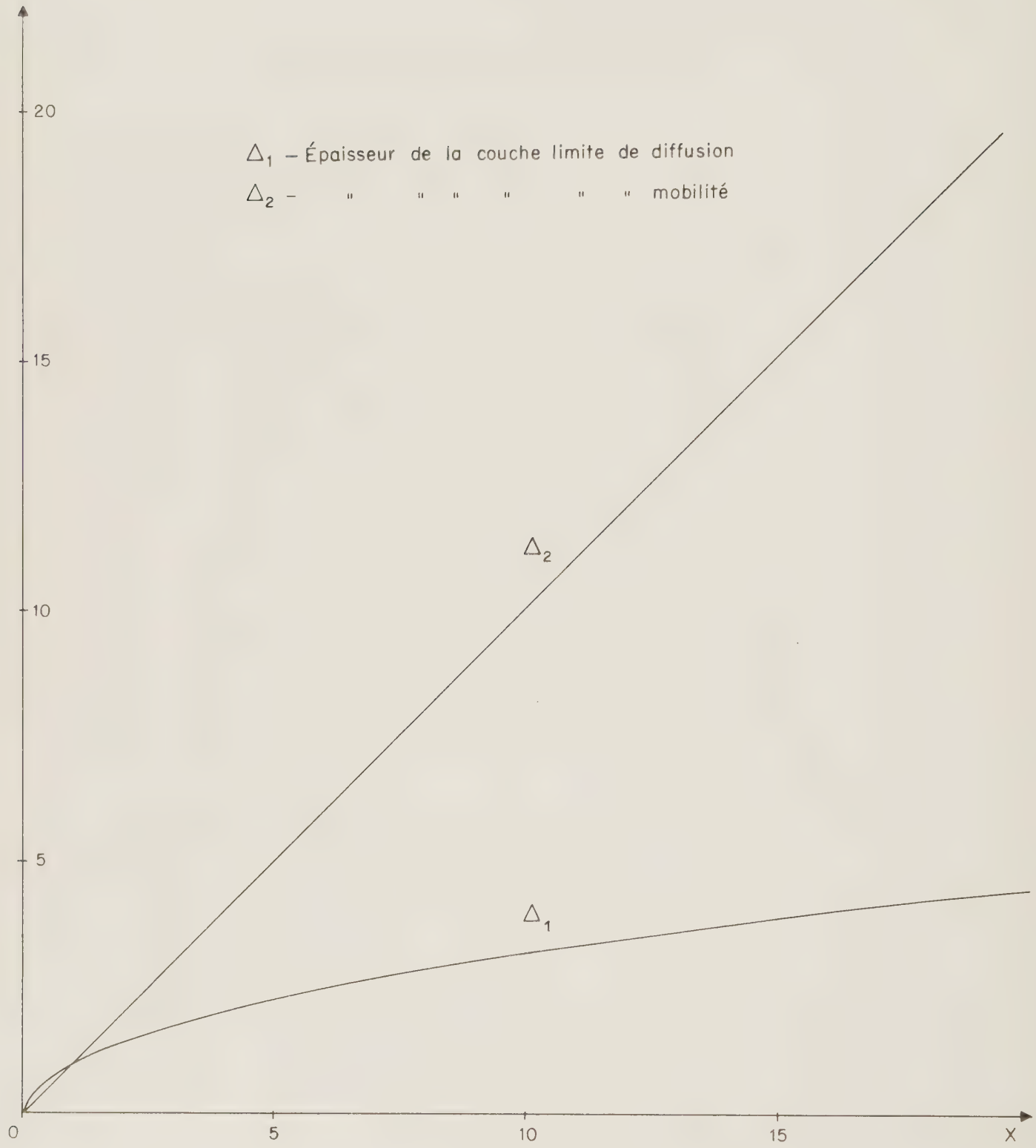
ÉPAISSEUR DE LA ZONE CHARGÉE



- Fig. 17 -



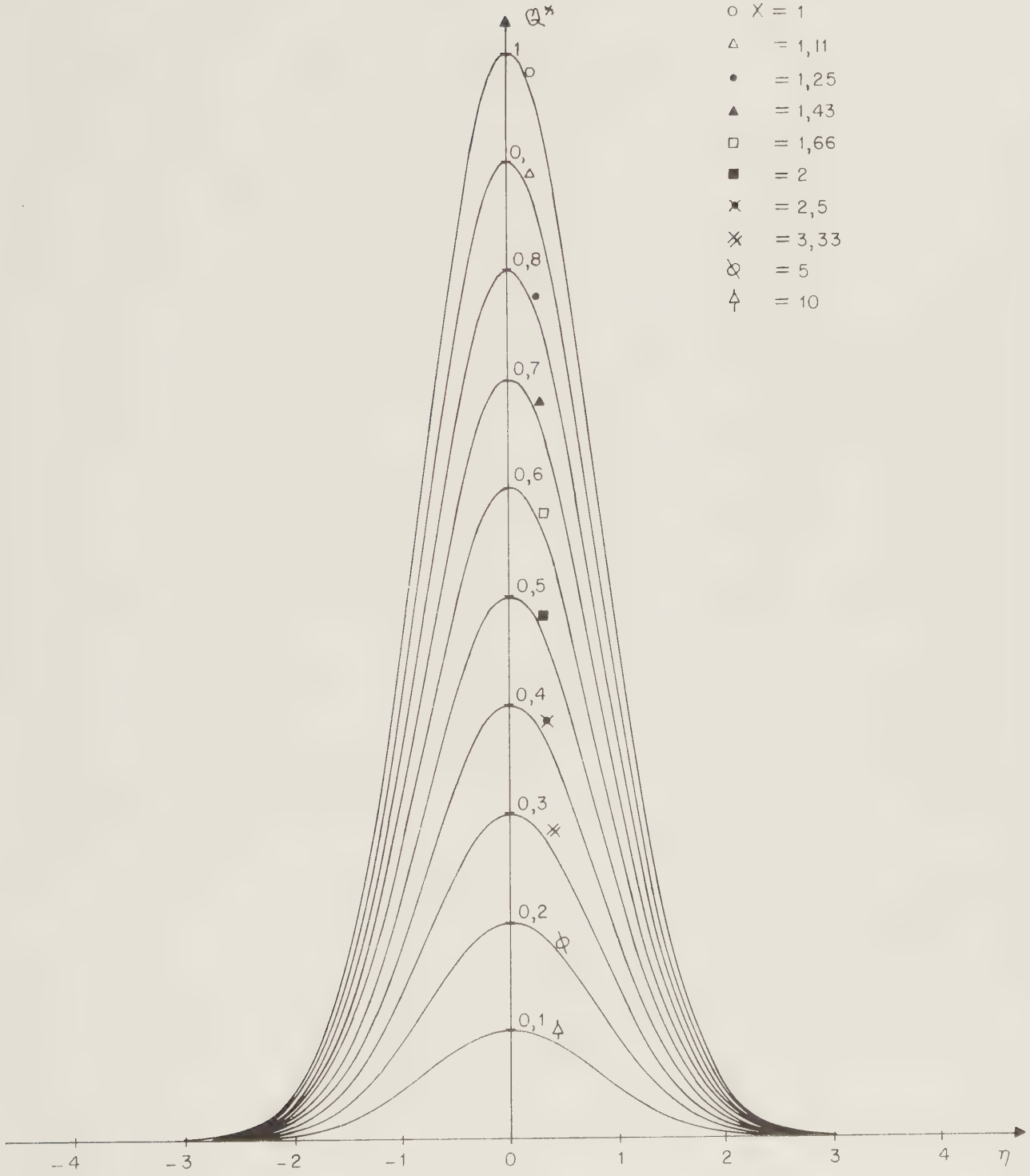
- Fig. 18 - Potentiel des charges.


Δ_1 – Épaisseur de la couche limite de diffusion
Δ_2 – " " " " " " mobilité
20
15
10
5
0
5
10
15
X
Δ_2
Δ_1

– Fig. 19 –

DENSITÉ DE CHARGE

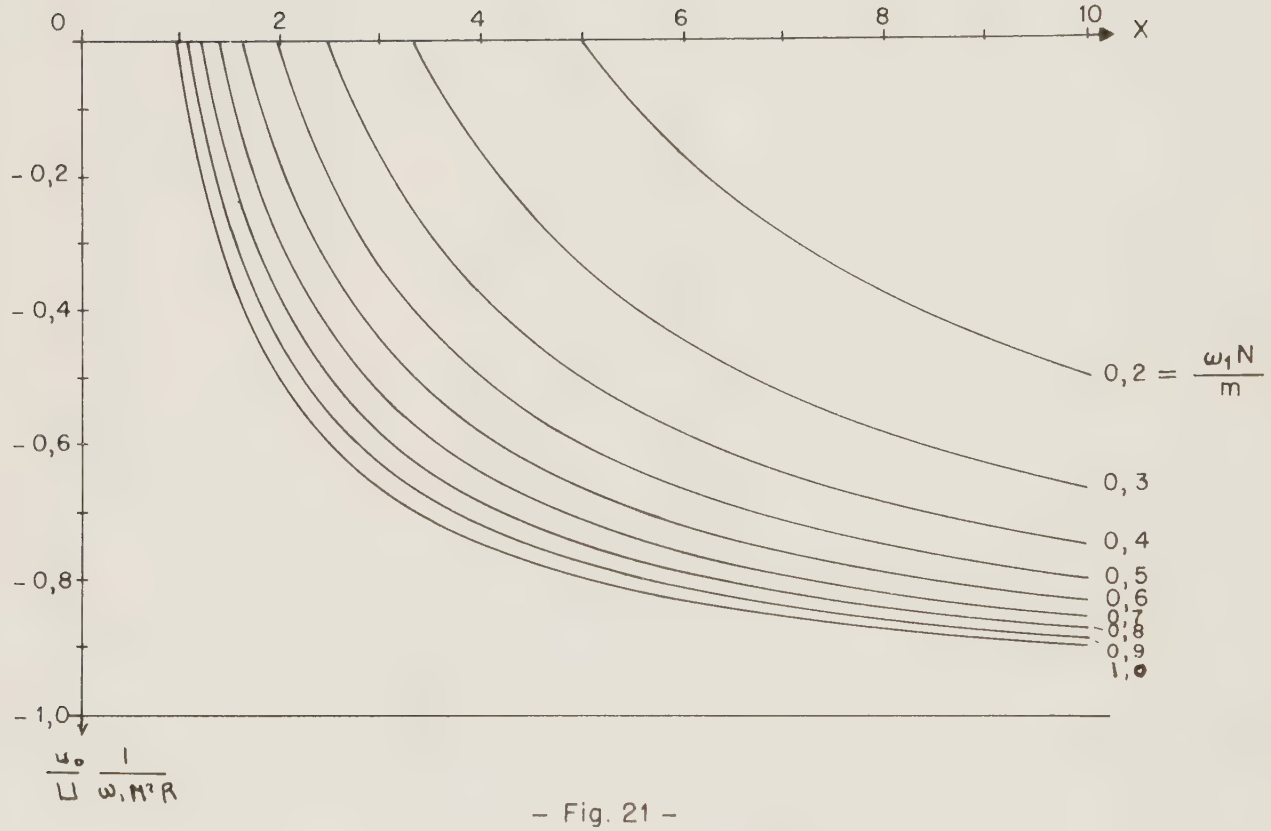
$$Q^*(x,y) = X^{-1}\, e^{-\frac{\pi}{2}\eta^2}$$



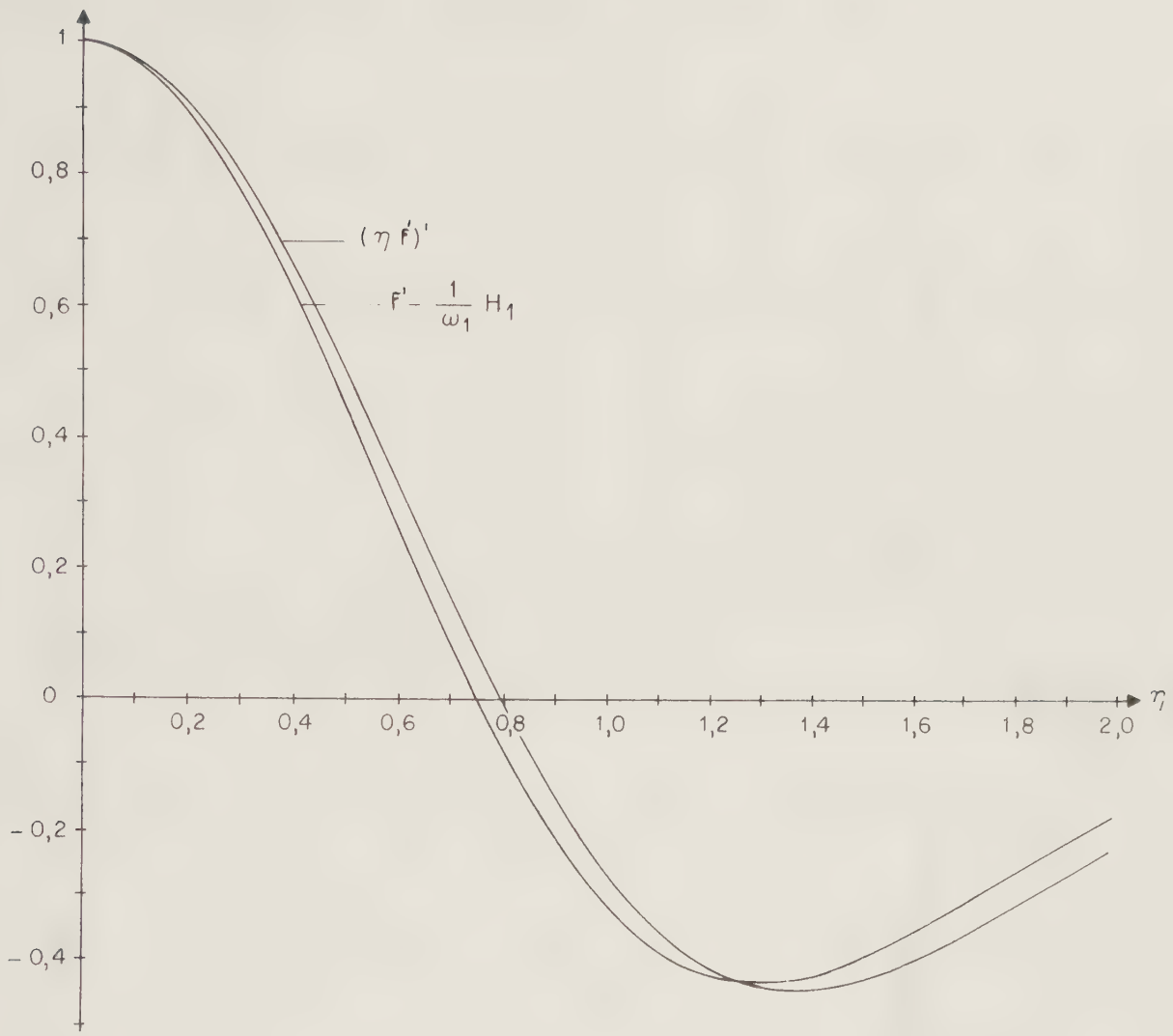
– Fig. 20 –

CHAMP ALIGNÉ

VITESSE EXCÉDENTAIRE SUR L'AXE DANS LA ZONE DU JET



– Fig. 21 –



- Fig. 22 -

INFLUENCE d'une COMPOSANTE TRANSVERSALE IMPAIRE

vitesse excédentaire sur l'axe dans la zone du jet

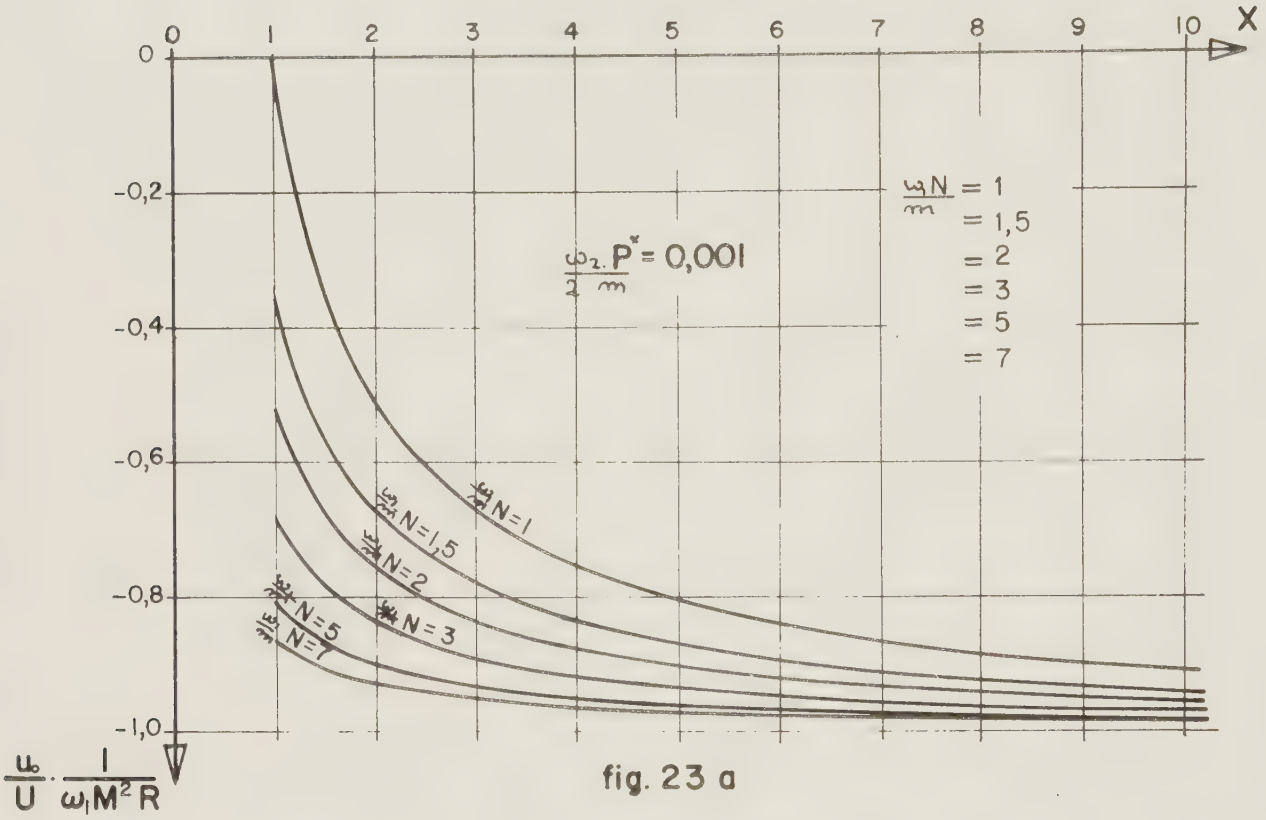


fig. 23 a

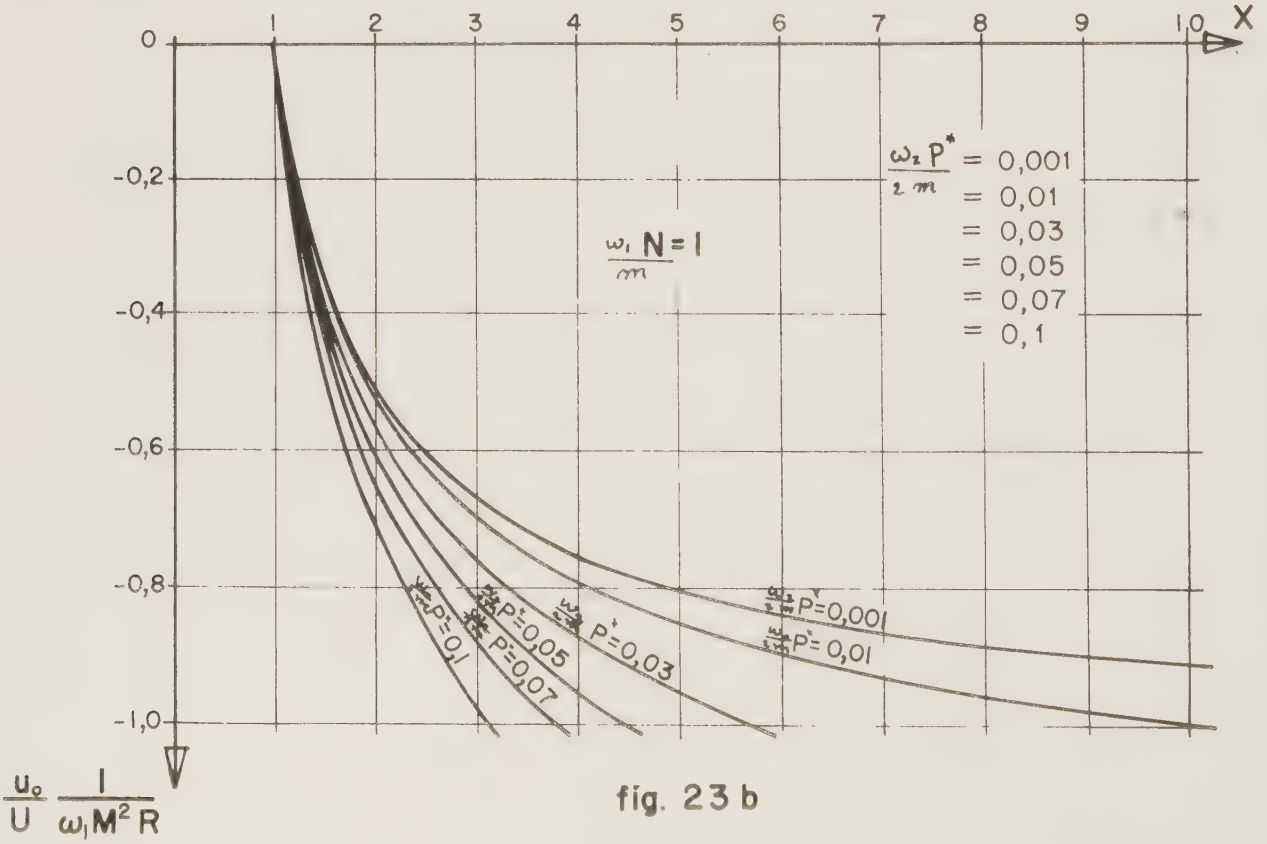


fig. 23 b

Solution des équations

III - 2 - 30

III - 2 - 31

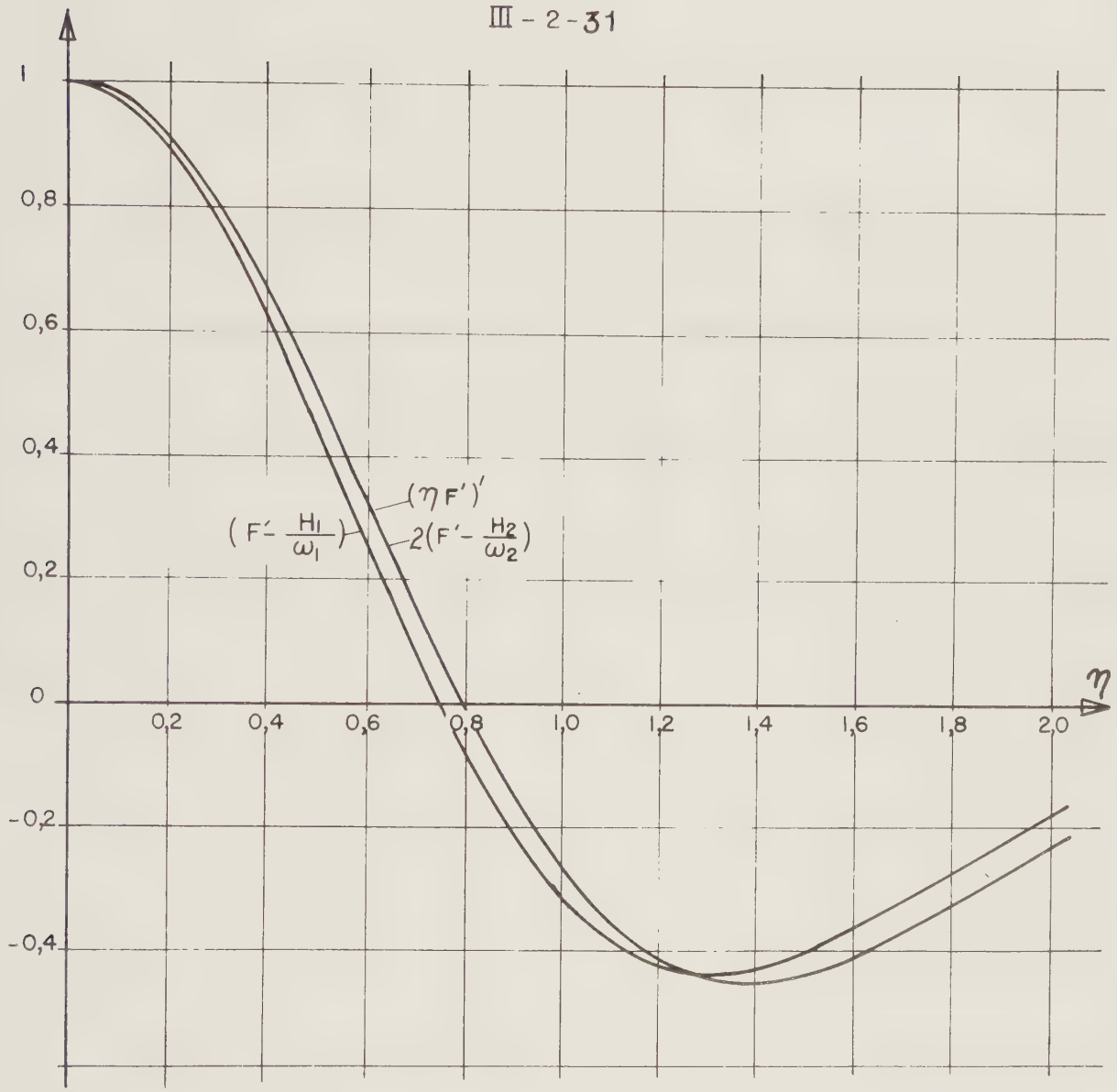


fig. 24

CHAPITRE IV

LE SILLAGE CHARGE CONFINE DANS UNE CHAMBRE DE HAUTEUR CONSTANTE

Un sillage se crée derrière un corps en mouvement dans un fluide au repos, ou bien inversement, derrière un corps immobile dans un écoulement fluide. Suivant l'importance de la vitesse du fluide, le sillage peut être laminaire, peut comporter une rue de tourbillons alternés (tourbillons de Von Karman), ou peut être turbulent...

Si le sillage se développe dans un écoulement de vitesse constante et de largeur infinie, le gradient de pression est pratiquement constant et n'a pas d'influence sur le sillage. La largeur du sillage croît avec la distance et la différence entre la vitesse de l'écoulement extérieur et celle du sillage diminue. De ce fait, à une grande distance du corps, on peut supposer cette différence de vitesse, qui est la vitesse déficitaire, faible et négligeable au second ordre.

Par contre, lorsque l'écoulement ambiant est limité dans une chambre, dont nous supposons d'emblée la hauteur constante, il naît un gradient de pression qui dépend de la variation de la vitesse de l'écoulement ambiant. Cette vitesse n'est plus constante et la vitesse déficitaire ne peut plus être supposée faible. Il en résulte que ni l'équation de la charge, ni l'équation du mouvement ne sont linéarisables. A la méthode suivie jusqu'à présent, nous allons substituer une méthode certes plus globale, mais qui a l'avantage d'être plus proche des conditions expérimentales. La grande analogie qui existe entre les études des jets et des sillages, nous conduit à faire appel à la théorie approchée des jets confinés de Craya et Curtet[2.].

Dans ce qui suit, la densité de charge est supposée quelconque et nous nous limiterons au cas du champ aligné. L'effet d'une composante transversale sera

dû au champ propre des charges comme on l'a vu au chapitre III.

1 - Système d'équations

Rappelons que l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial c}{\partial y}\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] - \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial (\Phi+\varphi)}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial (\Phi+\varphi)}{\partial x}\right]$$

(IV-1-1)

Compte tenu de l'équation de Poisson (I-2-8) le terme électrique s'écrit :

$$\frac{\varepsilon}{\rho}\left\{\frac{\partial c}{\partial y}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right] + \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right]\right\}$$

(IV-1-2)

Dans le cas du champ aligné :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = -E_0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

(IV-1-3)

le second crochet de (IV-1-2) est nul et l'équation (IV-1-1) devient :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial c}{\partial y}\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] - \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{\partial c}{\partial y}\left[\left(-E_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right]$$

(IV-1-4)

Cette équation s'intègre en y ; compte tenu des conditions aux limites relatives à la vitesse, à la charge et celles relatives au frottement qui sont :

$$\begin{cases} z(y=0) = 0 \\ z(y=\infty) = 0 \end{cases}$$

(IV-1-5)

on obtient l'équation du mouvement :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Sigma}{\partial y} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\varepsilon}{\rho}\left[\left(-E_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_{ext}\right] - UU' \qquad (\text{IV-1-6})$$

En vue de faire une intégration globale, il faut joindre à cette équation, l'équation de continuité (I-2-5) l'équation de Poisson (I-2-8) et l'équation de la charge qui est dans le cas du champ aligné :

$$u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} = D\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + K\frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \qquad (\text{IV-1-7})$$

Avant d'introduire les notations d'affinité, il semble nécessaire de rappeler les faits suivants : la théorie approchée des jets confinés de Craya et Curtet veut que les profils de vitesse excédentaire soient affines. Ce fait a été vérifié expérimentalement par divers auteurs aussi bien dans les sillages que dans les jets. De plus, les chapitres précédents nous ont conduits à des profils affines qui sont en général des courbes de Gauss. Ceci étant, on peut écrire :

$$\begin{cases} u = U(x) - u_0(x)\, f(\zeta) \\ q = q_0(x)\, g(\eta) \end{cases} \qquad (\text{IV-1-8})$$

où :

$$\begin{cases} f(\zeta) = e^{-\frac{\pi}{4}\zeta^2} \\ g(\eta) = e^{-\frac{\pi}{4}\eta^2} \end{cases} \qquad (\text{IV-1-9})$$

les variables ζ et η étant les mêmes que dans les chapitres précédents.

Posons :

$$\delta(x) = \frac{\delta(x)}{\beta(x)}$$

de telle sorte que la relation entre ζ et η soit :

$$\zeta = \delta \eta \qquad (\text{IV-1-10})$$

Pour déterminer les inconnues U, u_0, β, q_0 et δ il faut ajouter à l'équation de continuité, à l'intégrale globale de l'équation de la charge, aux théorèmes des quantités de mouvement et des moments de quantité de mouvement, une autre équation : par exemple l'équation de la charge sur l'axe.

Procédons maintenant à l'établissement des équations globales. La première s'obtient de l'équation de continuité ; soit :

$$U h - u_0 \beta = \mathcal{D} \qquad (\text{IV-1-11})$$

où h est la demie-hauteur de la chambre de confinement. (IV-1-11) indique que le débit $\mathcal{D}$ à travers une section résulte de la différence entre le débit de l'écoulement ambiant et le débit déficitaire. Notons que dans un jet on aurait une somme au lieu d'une différence.

L'équation de la charge s'écrit en variables réduites :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(U - u_0 f)\, q_0 g\right] + \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\left[(u_0\beta)' F - u_0 \beta' f - U' \beta \zeta\right] q_0 g\right\} =$$

$$D \frac{q_0}{\delta^2} g'' - K \frac{q_0^2 \delta}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \eta}(gG) \qquad (\text{IV-1-12})$$

en intégrant cette équation en η entre 0 et ∞, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[U q_0 \delta - \frac{u_0 q_0 \delta}{\sqrt{\sigma^2 + 1}}\right] = 0 \qquad (\text{IV-1-13})$$

ce qui donne :

$$Q_0 \left(U - \frac{u_0}{\sqrt{\delta^2+1}} \right) = c^{te} \qquad (\overline{IV}-1-14)$$

Cette relation exprime que le courant transporté se conserve ; on pose la constante d'intégration égale à C. Lorsque la vitesse est constante et est très grande devant la vitesse U, on retrouve que la charge totale Q_0 à travers une section droite est constante.

Une autre relation également nécessaire se déduit de l'équation de la charge sur l'axe. Faisant $\eta = 0$ dans (IV-1-12) on obtient :

$$(Q_0'\delta^2 - Q_0\delta\delta')(U-u_0) = -\frac{\pi}{2} D Q_0 - \frac{K Q_0^2}{\varepsilon}\delta \qquad (\overline{IV}-1-15)$$

Dans les conditions du premier chapitre, c'est-à-dire, U constante et u_0 et q_0 négligeables au second ordre, l'équation ci-dessus donne une loi de $\delta(x)$ identique à (II-2-23).

Quant à l'équation du mouvement (IV-1-6) nous pouvons l'écrire en variables réduites :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}(\Sigma) = -\left[(U u_0)'\beta + u_0(U\beta)'\right] f + u_0(U\beta)'(\zeta f)' + (u_0^2\beta)' f^2 - (u_0\beta)' u_0 (fF)'$$

$$-\frac{1}{\varepsilon\rho}\left[\varepsilon E_0 q_0 \beta g + q_0^2 \delta \beta g G - \frac{(q_0^2\delta^2)'}{2}\beta G^2 + q_0^2\delta\delta'\beta\eta g G + \frac{(q_0^2\delta^2)'}{2}\beta\right]$$

$$(\overline{IV}-1-16)$$

Appliquons le théorème des quantités de mouvement, c'est-à-dire, intégrons l'équation ci-dessus en ζ entre 0 et ∞. Il vient tous calculs faits :

$$-\left[(U u_0)'\beta + u_0(U\beta)'\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}(u_0^2\beta)' + \frac{1}{\varepsilon\rho}\left[\varepsilon E_0 Q_0 + \frac{Q_0^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}(Q_0^2\delta)'\right]$$

$$(\overline{IV}-1-17)$$

Les termes du premier crochet de (IV-1-16) s'expriment en fonction de la variation du flux de quantité de mouvement du sillage et des termes électriques. De ce fait, posant :

$$\begin{cases} k_1 = \int_0^\infty f^2 \, d\zeta \\ k_2 = \int_0^\infty \eta G G' \, d\eta \end{cases} \qquad (\text{IV-1-18})$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{k_1} \int_0^\zeta f^2 \, d\zeta \\ M_2 = \frac{1}{k_2} \int_0^\eta \eta G G' \, d\eta \end{cases} \qquad (\text{IV-1-19})$$

et intégrant (IV-1-16) on obtient :

$$\frac{\tau}{\rho u_0^2} = k_1 \frac{(u_0^2 \beta)'}{u_0^2} (M_1 - F) + \frac{(U\beta)'}{u_0} \zeta f - (u_0 \beta)' f F$$

$$+ \frac{E_0 Q_0}{\rho u_0^2} \left[F - G\right] + \frac{Q_0}{2\varepsilon \rho u_0^2} (F - G^2) + k_2 \frac{(Q_0^2 \delta)'}{\varepsilon \rho u_0^2} \left[F - M_2\right] - \frac{Q_0^2 \delta}{2\varepsilon \rho u_0^2} (\eta - \eta G^2)$$

(IV-1-20)

Sans les termes électriques et si l'on changeait le signe de , l'équation ci-dessus serait identique à celle qu'ont obtenue Craya et Curtet [2].

Dans son étude sur les jets confinés en présence d'un champ magnétique transversal, Moreau [8] a obtenu une équation identique à celle obtenue par Craya et Curtet. Le théorème des quantités de mouvement permettait alors d'éliminer les termes électromagnétiques. Mais il n'en va pas de même pour le sillage chargé où l'équation des moments de quantité de mouvement dépend des termes électriques.

Pour exprimer le théorème des moments de quantités de mouvement par rapport à l'axe du sillage, on intègre globalement l'équation ci-dessus ; on obtient après quelques calculs :

$$t(x) = a_1 \frac{(u_0^2 \beta)'}{u_0^2} + a_2 \frac{(U\beta)'}{u_0} - a_3 \frac{(u_0 \beta)'}{u_0}$$

$$+ a_4 \frac{E_0 Q_0}{\rho u_0^2} + a_5 \frac{Q_0^2}{\varepsilon \rho u_0^2} + a_6 \frac{(Q_0^2 \delta)'}{\varepsilon \rho u_0^2} - a_7 \frac{Q_0^2 \delta}{\varepsilon \rho u_0^2} \qquad (\text{IV-1-21})$$

où l'on a posé :

$$t(x) = \int_0^\infty \frac{\tau}{\rho u_o^2} \, d\eta$$

et :

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\pi} \\ a_2 = \dfrac{2}{\pi} \\ a_3 = 0,5 \\ a_4 = \dfrac{2}{\pi}(s-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_5 = \dfrac{1}{\pi}(\sqrt{2}\, s - 1) \\ a_6 = \dfrac{s}{\pi}\left(1 + \dfrac{2}{\pi}\right) - \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \\ a_7 = \dfrac{s}{2\pi}\left(1 + \dfrac{2}{\pi}\right) \end{cases} \qquad (IV-1-23)$$

t(x) est le coefficient de frottement moyen. Il est proportionnel à $\frac{\partial u}{\partial y}$, par conséquent il est d'un signe opposé à celui du coefficient de frottement moyen dans un jet (Fig. 25a).

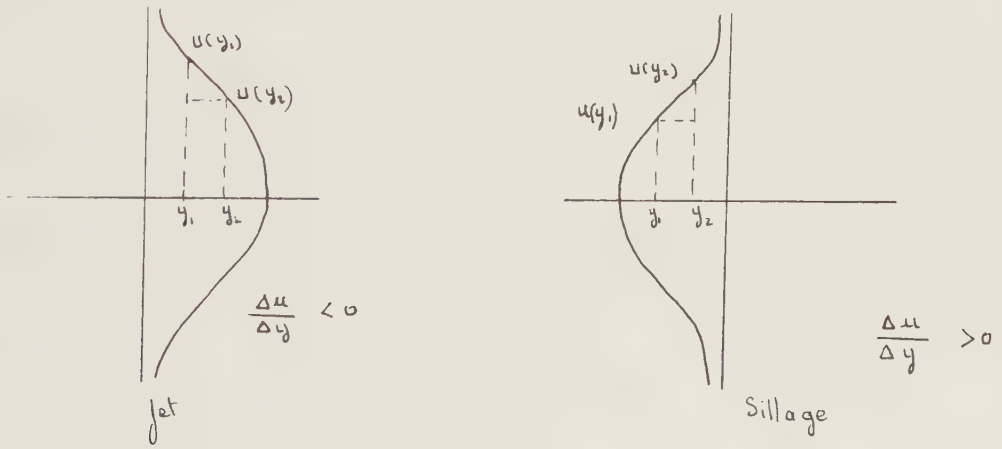


Fig. 25a.

Si le coefficient t(x) est connu on peut étudier l'évolution des diverses grandeurs u_o, U, β, q_o, et δ grâce au système suivant :

$$\begin{cases} Uh - u_o\beta = U_o h & (IV-1-26) \\ Q_o\left(U - \dfrac{u_o}{\sqrt{\delta^2+1}}\right) = c^{te} & (IV-1-25) \\ (Q_o'\delta^2 - Q_o\delta\delta')(U-u_o) = -Q_o\left(\dfrac{\pi}{2}D + \dfrac{K}{\varepsilon}Q_o\delta\right) & (IV-1-26) \\ -\dfrac{(U^2u_o\beta)'}{U} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(u_o^2\beta)' - \dfrac{1}{\varepsilon\rho}\left[\varepsilon E_o Q_o + \dfrac{Q_o^2}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}(Q_o^2\delta)'\right] = 0 & (IV-1-27) \\ t = a_1\dfrac{(u_o^2\beta)'}{u_o^2} + a_2\dfrac{(U\beta)}{u_o} - a_5\dfrac{(u_o\beta)'}{u_o} \\ \quad + a_4\dfrac{E_oQ_o}{\rho u_o^2} + a_5\dfrac{Q_o^2}{\varepsilon\rho u_o^2} + a_6\dfrac{(Q_o^2\delta)'}{\varepsilon\rho u_o^2} - a_7\dfrac{Q_o^2\delta}{\varepsilon\rho u_o^2} & (IV-1-28) \end{cases}$$

Il est intéressant de noter que, pour le sillage classique, le système précédent se réduit à :

$$\begin{cases} Uh - u_o\beta = U_o h & (IV-1-29) \\ -\dfrac{(U^2u_o\beta)'}{U} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(u_o^2\beta)' = 0 & (IV-1-30) \\ t = a_1\dfrac{(u_o^2\beta)'}{u_o^2} + a_2\dfrac{(U\beta)'}{u_o} - a_3\dfrac{(u_o\beta)'}{u_o} & (IV-1-31) \end{cases}$$

Comme Craya et Curtet, on peut éviter de préciser le coefficient t en introduisant une nouvelle abscisse telle que :

$$x' = tx \qquad \text{(IV-1-32)}$$

Il est possible ensuite de trouver une solution explicite du système précédent. Nous ne nous étendons pas là-dessus d'autant plus que le système général des équations (IV-1-24) à (IV-1-28) contient la solution du sillage classique comme cas particuliers.

Le changement de variable (IV-1-32) ne peut être effectué dans le système général du sillage chargé. Une intégration numérique est nécessaire, lorsque l'on se donne t(x). On suppose t constant en moyenne et égal à 0,03, valeur communément admise dans l'étude des jets et des sillages.

Les seules données caractéristiques permettant l'étude du sillage chargé sont la demie-hauteur h, le débit $\mathcal{D}$ et l'invariant C. Introduisant les variables adimensionnelles :

$$\begin{cases} W = \dfrac{u_o}{U_o} \quad , \quad X = \dfrac{x}{h} \\ U_1 = \dfrac{U}{U_o} \quad , \quad Y = \dfrac{Q_o}{Q_{oi}} \\ L = \dfrac{\beta}{h} \quad , \quad Z = \dfrac{\delta}{h} \end{cases} \qquad \text{(IV-1-33)}$$

et notant :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{C}{Q_{oi} U_o} \quad , \quad N = \dfrac{E_o Q_{oi}}{\rho U_o^2} \\ P_i = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{D}{U_o h} \quad , \quad P = \dfrac{Q_{oi}^2}{\varepsilon \rho U_o^2} \\ \nu = \dfrac{K Q_{oi}}{\varepsilon U_o} \end{cases} \qquad \text{(IV-1-34)}$$

le système des équations (IV-1-24) à (IV-1-28)

$$\begin{cases} U_1 = 1 + WL & (IV\text{-}1\text{-}35) \\ Y = \dfrac{\lambda}{\left[U_1 - \dfrac{W}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right]} & (IV\text{-}1\text{-}36) \\ (Z^2Y' - YZZ')(U_1 - W) = -\rho_i Y - \nu Y^2 Z & (IV\text{-}1\text{-}37) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}(W^2L^2)' + (WL)' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(W^2L)' + NY + P\left[\dfrac{Y^2}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}(Y^2Z)'\right] = 0 & (IV\text{-}1\text{-}38) \\ t\,W^2 = a_1(W^2L)' + a_2\left[WL' + W(WL^2)'\right] - a_3 W(WL)' \\ \quad + a_4 NY + P\left[a_5 Y^2 + a_6(Y^2Z)' - a_7(Y^2Z)\right] & (IV\text{-}1\text{-}39) \end{cases}$$

Faisons quelques remarques sur les nombres adimensionnels introduits. Tout d'abord notons que la grandeur de référence Q_{oi} caractérisant l'injection initiale, est fixée par le paramètre λ et l'invariant C. Le nombre de Peclet électrique est comme on l'a vu de l'ordre de 10^{+6} à 10^{+8}. Le nombre ν dépend de la mobilité et de l'injection ; or, on a vu au chapitre III, qu'on pouvait relier le champ dû aux charges à la charge totale par unité de surface par la relation :

$$e(\infty) = \frac{Q_o}{\varepsilon}$$

donc le nombre ν peut s'écrire :

$$\nu = \frac{K e_i}{U_o} \qquad (IV\text{-}1\text{-}40)$$

étant la valeur initiale du champ propre des charges. Ainsi ν est le rapport

de la vitesse relative des charges à la vitesse de référence U_0. Les nombres N et P caractérisent respectivement l'importance relative par rapport aux forces d'inertie du fluide, des forces électriques dues au champ appliqué d'une part, et de celles dues aux charges d'autre part. Plus précisement, pour une vitesse de référence U_0 donnée, le nombre P ne dépend que de l'injection des charges tandis que N dépend du champ électrique appliqué et de l'injection. Il est clair que dans le cas d'une injection faible γ et P sont très petits devant l'unité de telle sorte que le problème ne dépend plus que des nombres Pe et N.

Notons enfin que dans le cas du sillage classique les équations (IV-1-36) et (IV-1-37) disparaissent et annulant N et P dans les équations (IV-1-38) et (IV-1-39) on obtient le système :

$$\begin{cases} U_1 = 1 + WL & (\text{IV}-1-41) \\ \frac{3}{2}(W^2L^2)' + (WL)' - \frac{\sqrt{2}}{2}(W^2L)' = 0 & (\text{IV}-1-42) \\ tW^2 = a_1(W^2L)' + a_2\left[WL' + W(WL^2)'\right] - a_3W(WL)' & (\text{IV}-1-43) \end{cases}$$

Evidemment on obtiendrait le même système que celui ci-dessus en écrivant le système des équations (IV-1-29) à (IV-1-31) en variables adimensionnelles.

Pour en revenir au système général des équations (IV-1-35) à (IV-1-39) signalons que les variables U_1 et Y s'expriment en fonction des variables W et L. Il est préférable dans ce qui suit d'exprimer le système en fonction du débit déficitaire relatif WL et de la largeur relative L. Posons :

$$R = WL$$

les équations (IV-1-35) à (IV-1-39) s'écrivent alors :

$$U_1 = 1 + R \qquad (IV-1-44)$$

$$Y = \frac{\lambda}{1 + R(1 - S^{1/2})} \qquad (IV-1-45)$$

$$H_1 \left[(1 - S^{1/2}) R' + RLS^{3/2} L' \right] + (1 + H_1 R S^{3/2}) Z Z' = \frac{1}{1 + R - \frac{R}{L}} (P_i + \nu Y) \qquad (IV-1-46)$$

$$\left[3R + 1 - \sqrt{2} \frac{R}{L} - H_2 (1 - S^{1/2}) \right] R' + \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{R^2}{L^2} - H_2 RLS^{3/2} \right] L'$$

$$+ \left[\frac{\sqrt{2}}{\pi} PY^2 - H_2 RZS^{3/2} \right] Z' = -NY - P\frac{Y^2}{2} \qquad (IV-1-47)$$

$$\left\{ (2a_1 - a_3) \frac{R}{L} + a_2 R - H_3 (1 - S^{1/2}) \right\} R' + \left\{ \left[a_2 (1+R) - a_1 \frac{R}{L} \right] \frac{R}{L} - H_3 RLS^{3/2} \right\} L'$$

$$+ \left\{ a_6 PY^2 - H_3 RZS^{3/2} \right\} Z' = t \frac{R^2}{L^2} - a_4 NY - a_5 PY^2 \qquad (IV-1-48)$$

en notant :

$$S = \frac{1}{Z^2 + L^2}$$

$$H_1 = \frac{YZ^2}{\lambda} \qquad (IV-1-49)$$

$$H_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} P \frac{Y^3 Z}{\lambda}$$

$$H_3 = 2(a_6 - a_7) P \frac{Y^3 Z}{\lambda}$$

Les équations (IV-1-46) à (IV-1-48)sont linéaires par rapport aux dérivées R' et L'.

Pour le sillage classique on a :

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}(R^2)' + R' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{R^2}{L}\right)' = 0 & (IV-1-50) \\ \left[(2a_1 - a_3)\dfrac{R}{L} + a_2 R\right]R' + \left[a_2(1+R)\dfrac{R}{L} - a_1\dfrac{R^2}{L^2}\right]L' - t\dfrac{R^2}{L^2} = 0 & (IV-1-51) \end{cases}$$

Pour retrouver les équations du jet confiné il suffit de changer successivement les signes des équations (IV-1-50) et (IV-1-51) ci-dessus, du débit relatif R et du coefficient de frottement t.

Pour les jets confinés on a comme conditions aux limites :

$$R(0) = 0 \quad , \quad L(0) = 0 \qquad (IV-1-52)$$

Voyons ce que deviennent celles-ci dans le cas du sillage confiné. Intégrons d'abord l'équation (IV-1-50) ; on a :

$$\frac{3}{2}R^2 + R - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{R^2}{L} = m \qquad (IV-1-53)$$

Ce nombre m n'a pas la même signification que le paramètre de Craya et Curtet. Rappelons que le paramètre de Craya et Curtet est le rapport du flux de quantité de mouvement du jet à celui du débit latéral au voisinage de l'orifice du jet. Mais dans le cas du sillage, ce nombre dépend, comme on l'a vu au chapitre I, de la force exercée par le fluide sur le corps. En effet l'équation (IV-1-53) peut être retrouvée par application directe du théorème des quantités de mouvement à travers une

surface de contrôle contenant l'obstacle. Pour cela considérons la surface ABCD (Fig. 25 b).

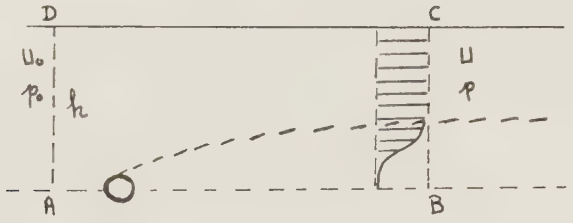


Fig. 25 b

Le flux de quantité de mouvement sortant est :

$$\rho\int_o^h u^2 dy - \rho U_o^2 h = \rho\left[h(U^2-U_o^2) - 2U u_o\beta + \frac{\sqrt{2}}{2} u_o^2\beta\right] \qquad (\text{IV-1-54})$$

Les forces extérieures sont : $-\mathcal{F}$ la force exercée par le corps sur le fluide, $-T$ la force exercée par la paroi de la chambre sur le fluide et $(p_o - p)h$ la force de pression. Le théorème de Bernouilli permet d'exprimer la variation de pression sous la forme suivante :

$$p_o - p = \frac{1}{2}\rho(U^2-U_o^2) \qquad (\text{IV-1-55})$$

Le théorème des quantités de mouvement s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{U^2}{U_o^2}\right) + 2\frac{U}{U_o}\frac{u_o\beta}{U_o h} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{u_o^2\beta}{U_o^2 h} = \frac{\mathcal{F}+T}{\rho U_o^2 h} \qquad (\text{IV-1-56})$$

En introduisant les variables L et R dans cette équation on retrouve (IV-1-53). Admettons que la force T exercée par la paroi sur le fluide soit faible devant la force $\mathcal{F}$ exercée sur l'obstacle ; on obtient alors, pour un corps cylindrique :

$$m = \frac{C_R}{4}\frac{d}{h}$$

Cette valeur est la même que celle obtenue dans le cas asymptotique étudié au second chapitre. Dans les conditions d'expérience :

$$d \simeq 1\,mm \quad , \quad h \simeq 1\,cm$$

et prenant :

$$C_R = 1,2 \qquad (IV-1-57)$$

on a :

$$m = 0,03 \qquad (IV-1-58)$$

Avant d'introduire les conditions aux limites il convient de faire quelques remarques sur l'équation (IV-1-53) ; d'abord cette équation permet d'expliciter la largeur L en fonction du débit déficitaire relatif R. Soit :

$$L = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} R^2}{\frac{3}{2} R^2 + R - m} \qquad (IV-1-59)$$

ensuite, dans les stades asymptotiques les termes du second ordre en R sont négligeables dans l'équation (IV-1-53) et on obtient :

$$R = m \qquad (IV-1-60)$$

et la relation (IV-1-59) montre que L tend vers 0,471404. Il est remarquable que cette valeur, constante et indépendante du sillage, corresponde au cas limite où le sillage atteint les parois de la chambre de confinement. Au-delà de cette limite les équations utilisées ne sont plus valables car l'écoulement ambiant est nul.

A faible distance (IV-1-53) montre que R est supérieur à m. Il apparaît donc que le débit déficitaire relatif est une fonction décroissante de x. Etudiant la fonction $L\left(\frac{1}{R}\right)$ définie par,

$$L = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{R} - m\frac{1}{R^2}} \qquad (IV-1-61)$$

on constate que L croît à partir d'un minimum atteint pour :

$$\begin{cases} R = 2m = 0,06 \\ L = \dfrac{2\sqrt{2}\,m}{6m+1} = 0,072 \end{cases} \qquad (\overline{IV}-1-62)$$

jusqu'à la valeur 0,471404 (Fig. 26).

Nous conviendrons de choisir une origine hypothétique à une distance du corps où la largeur commence à croître et où le débit déficitaire relatif est le double de sa valeur asymptotique. Il est clair qu'on ne peut pas prendre le corps, qui est une source ponctuelle de charges et de vitesse, comme origine ; c'est un point singulier où la charge et la vitesse déficitaire sont infinies.

Les conditions initiales relatives au sillage classique seront donc prises égales à :

$$R(o) = 0,06 \quad , \quad L(o) = 0,072$$

Admettons que le problème électrique ne modifie pas ces conditions initiales. On a donc pour le système général des équations (IV-1-44) à (IV-1-48) les conditions suivantes :

$$\begin{cases} R(o) = 0,06 \quad , \quad L(o) = 0,072 \\ Z(o) = 0 \quad , \quad Y(o) = 1 \end{cases}$$

où l'on a choisi le paramètre λ tel que :

$$\lambda = 1 + 2m\left(1 - \frac{1+6m}{2\sqrt{2}m}\right) = 1,0557$$

Ce système a été intégré numériquement à l'aide de l'ordinateur IBM 1132 par la méthode Runge-Kutta. Les résultats sont illustrés par les figures (27a, 27b) à (39a, 39b).

Nous avons d'abord considéré le sillage classique (Fig. 27a, 27b) ; ce cas s'obtient en intégrant les équations (IV-1-50) et (IV-1-51). La figure indique

que le débit déficitaire relatif R décroît et tend vers la valeur asymptotique m = 0,03, et que la largeur relative L est croissante. Nous avons pris les courbes représentatives de R et de L de cette même figure comme courbes de références dans les figures suivantes.

Les figures (28a, 28b) et (29a, 29b) montrent que lorsque le champ aligné augmente, le débit relatif R diminue et le sillage s'élargit. Ces faits sont plus marqués lorsque l'injection est plus forte. On notera aussi pour un champ aligné négatif, que le débit relatif R est plus important et la largeur relative L plus faible que dans le cas du sillage classique.

Rappelons que les effets de couches limites qui se développent le long des parois de la chambre de confinement sont négligés, que la frontière d'existence des solutions est atteinte lorsque L et R ont une tangente verticale et que la limite de validité du calcul est atteinte lorsque le sillage occupe toute la chambre. La vitesse déficitaire est alors amortie. Ce dernier point peut se traduire par L = 0,47. On a donc porté sur la figure (30a, 30b) les réseaux L(x) et R(x) pour des valeurs plus grandes de N. La figure (31) donne le réseau des courbes N(x) correspondant au lieu des points où le sillage atteint la paroi de la chambre. On constate que le sillage occupe toute la chambre d'autant plus rapidement que l'injection est importante. Les valeurs numériques sont données au Tableau I.

Les courbes des figures (32a, 32b) (33a, 33b) (34a, 34b) et (35a, 35b) montrent l'influence de l'injection sur le débit relatif R et sur la largeur relative L. Comme le champ appliqué, le champ propre des charges contribue aussi à élargir le sillage et à diminuer le débit déficitaire. Lorsqu'il n'est pas nul, le champ appliqué accentue davantage les effets du champ propre des charges. Mais lorsque le champ aligné est nul, le champ des charges suffit à lui seul, pour assurer l'élargissement du sillage et la diminution du débit déficitaire. Nous avons tracé sur la figure (36) le réseau des courbes P(x) indiquant le lieu des points où le sillage atteint la paroi de la chambre. (Tableau II).

Enfin, dans les limites de la validité de cette théorie, nous avons porté sur les figures (37a, 37b) (38a, 38b) et (39a, 39b) les réseaux des courbes Z(x) et Y(x) représentant respectivement l'épaisseur relative de la zone chargée et la charge totale à travers une section droite. On remarque d'abord que Y(x) tend vers une constante pour des grandes valeurs de X, comme on l'a déjà vu aux chapitres précédents. On retrouve aussi le phénomène d'élargissement de la zone chargée dû au champ propre des charges. Mais le fait nouveau de l'influence du champ aligné sur

la zone chargée se traduit par l'amincissement de cette zone. En effet, de l'accélération du fluide par le champ aligné, il résulte une concentration plus fine des charges au coeur du sillage.

2 - Conclusion

L'étude du sillage confiné a montré qu'il y a un lien étroit entre les charges et la vitesse du sillage. Leurs évolutions dépendent du champ électrique total et de la vitesse extérieure de l'écoulement ambiant. Les résultats obtenus se recoupent évidemment avec ceux des chapitres précédents. On retrouve ainsi que le débit déficitaire et la charge totale à travers une section tendent vers des valeurs constantes dans les régions asymptotiques du sillage. Les effets d'accélération du sillage et de son élargissement par le champ électrique ont été mis en évidence. Enfin une limite digne d'intérêt est celle obtenue lorsque le sillage occupe toute la chambre de confinement ; cette limite est fonction du champ appliqué et de l'injection des charges.

C O N C L U S I O N

Il semble utile de rappeler les grandes lignes de cette étude et les principaux résultats obtenus.

La première étape de ce travail a consisté à envisager les régions asymptotiques du sillage où la vitesse déficitaire est faible, en supposant le le régime laminaire. Dans le cas d'une injection de faibles densités de charges, une linéarisation des équations régissant le phénomène a permis d'utiliser l'une des méthodes les plus répandues dans tous les problèmes de couche limite, à savoir la recherche de solutions affines. C'est ainsi que l'on a pu expliciter les profils réduits de charge et de vitesse déficitaire, et mettre en évidence l'influence des diverses grandeurs électriques.

Par contre quand la densité de charge n'est pas faible l'équation de la charge n'est plus linéarisable. On ne peut obtenir le profil réduit de charge que d'une manière approchée et l'hypothèse d'affinité des profils réduits de vitesse déficitaire n'est vérifiée que dans la zone particulière du jet crée au sein du sillage là où les effets électriques sont prépondérants.

Dans une dernière étape, nous avons envisagé un aspect du problème plus conforme aux conditions d'expérience en laboratoire : le sillage confiné dans une chambre de hauteur constante. Pour aborder cet aspect nous avons utilisé une méthode globale dérivant de la thoérie approchée des jets confinés de Craya et Curtet.

Il ressort des résultats obtenus, que le sillage chargé en présence d'un champ électrique appliqué, présente des caractéristiques assez différentes du sillage hydrodynamique classique. Les forces de Coulomb d'une part et la mobilité des ions d'autre part donnent au sillage des aspects tout à fait originaux. En effet,

le champ aligné tend à accélérer le sillage et à entraîner les charges dans un mince filet de jet. Le champ transversal, auquel on peut substituer le champ propre des charges lorsque ces denières sont importantes, donne naissance à une vitesse relative , perpendiculaire à l'écoulement et favorisant l'écartement de la couche des charges.

Enfin, il a été possible de dégager un critère d'amortissement de la vitesse déficitaire. Ce critère dépend du champ électrique et de l'injection des densités de charges. En particulier lorsque la densité de charge est importante, le sillage occupe très rapidement toute la chambre de confinement.

TABLEAU I

INFLUENCE DU CHAMP ALIGNE SUR L'AMORTISSEMENT DE LA VITESSE DEFICITAIRE

P = 0,01		P = 0,02		P = 0,03		P = 0,04		P = 0,05	
X	N	X	N	X	N	X	N	X	N
9,5	0,008	6,8	0,010	9,6	0,005	8,4	0,005	7,5	0,005
7,6	0,010	4,8	0,015	6,2	0,010	5,8	0,010	5,3	0,010
6,66	0,012	4,0	0,02	4,4	0,015	4,2	0,015	4,1	0,015
5,4	0,015			3,8	0,020	3,4	0,020	3,3	0,020
4,2	0,020								

P = 0,1		P = 0,2		P = 0,3	
X	N	X	N	X	N
6,6	0,000	3,4	0,000	2,3	0,000
6,0	0,001	3,2	0,001	2,2	0,001
5,6	0,002	3,0	0,002	2,1	0,002
5,4	0,003	2,8	0,003	2,0	0,003
4,7	0,005	2,7	0,005	1,9	0,005
3,7	0,01	2,3	0,010	1,8	0,010
3,0	0,015	2,0	0,015	1,6	0,015
2,5	0,02	1,8	0,02	1,5	0,02

TABLEAU II

INFLUENCE DE L'INJECTION DES CHARGES
SUR L'AMORTISSEMENT DE LA VITESSE DEFICITAIRE

N=0		N=0,005		N=0,010		N=0,015		N=0,02	
X	P	X	P	X	P	X	P	X	P
8,33	0,08	9,6'	0,03	7,8	0,01	5,4	0,01	4,2	0,01
6,6	0,1	8,56	0,04	6,8	0,02	4,8	0,02	3,8	0,02
5,4	0,12	7,5	0,05	6,2	0,03	4,4	0,03	3,6	0,03
4,7	0,14	6,67	0,06	5,8	0,04	4,2	0,04	3,4	0,04
3,4	0,20	5,56	0,08	5,3	0,05	3,0	0,10	2,5	0,10
		4,7	0,10	3,7	0,10	2,5	0,15	2,2	0,15
		4,0	0,12	2,3	0,20	2,0	0,20	1,8	0,20
		3,2	0,15						
		2,7	0,20						

Sillage confiné non chargé

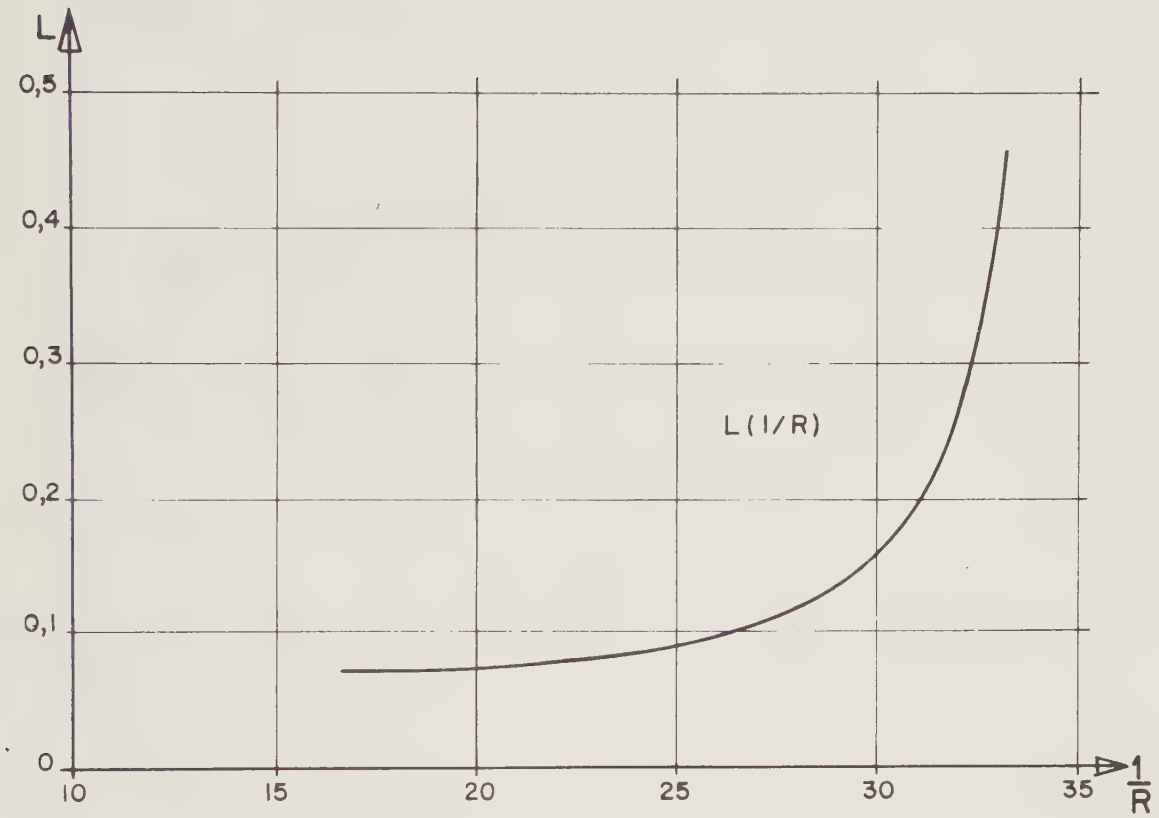
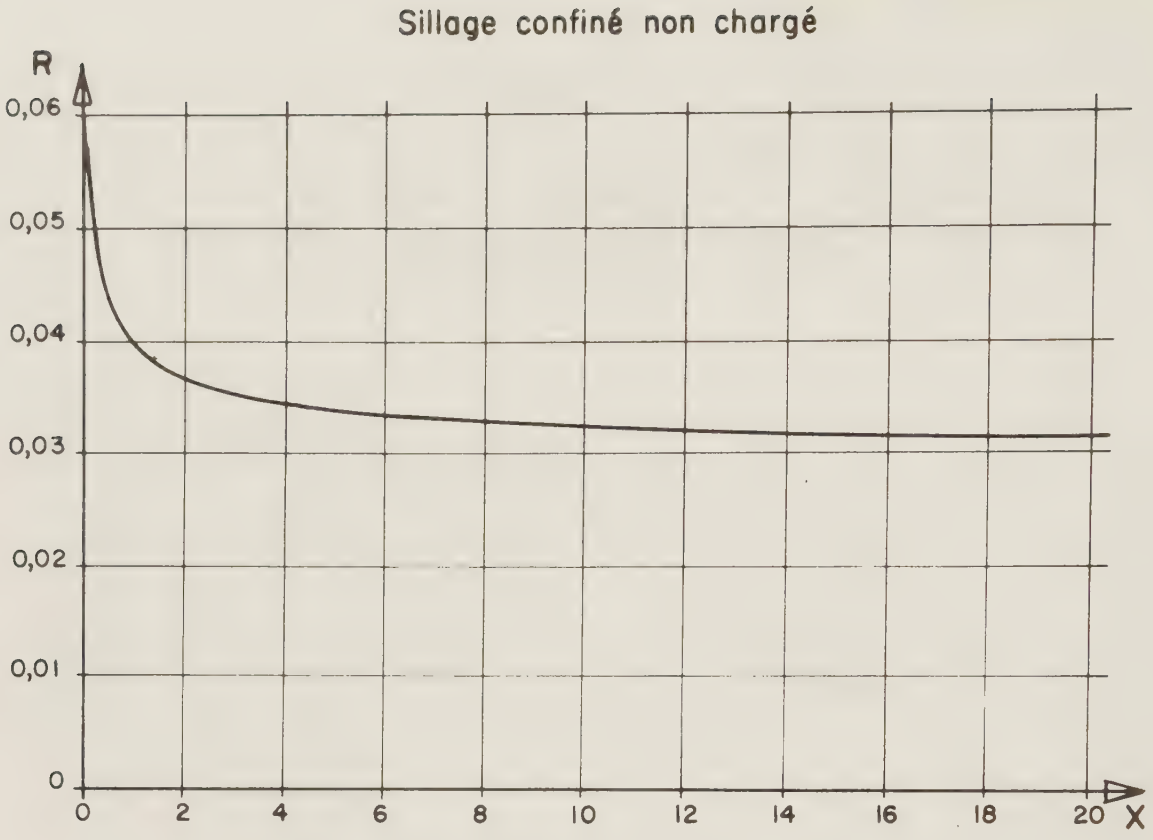
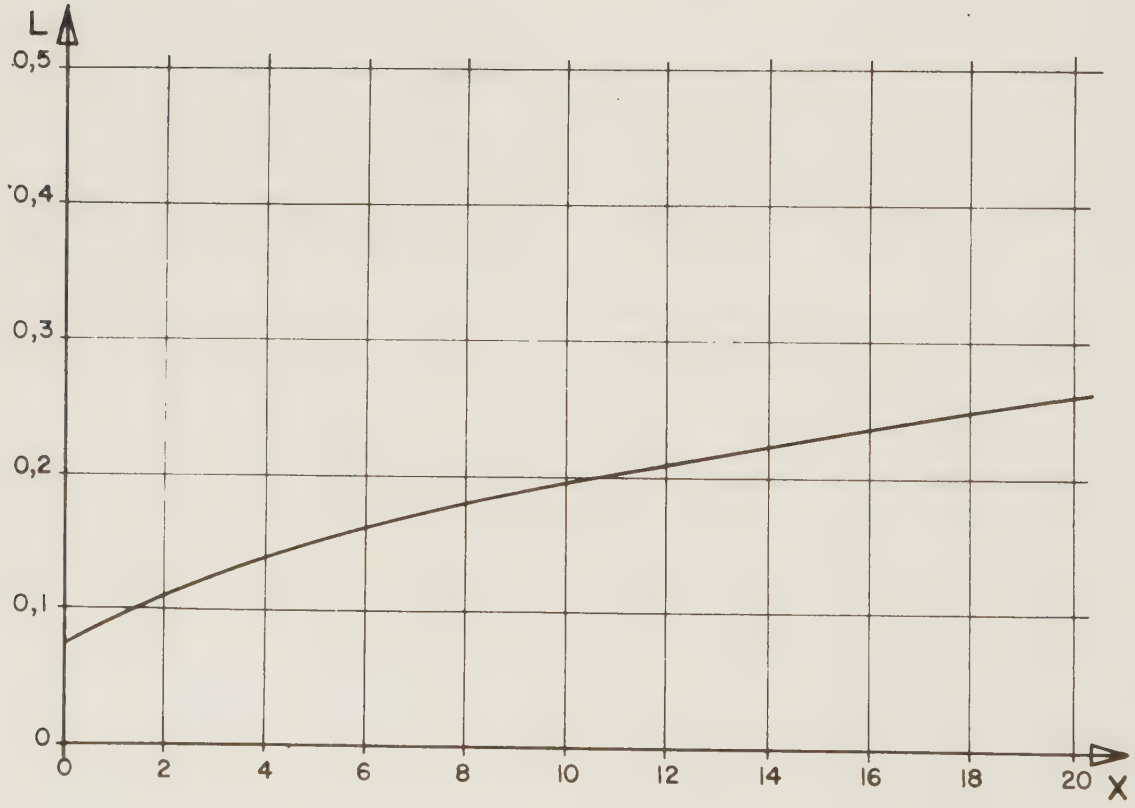


fig. 26

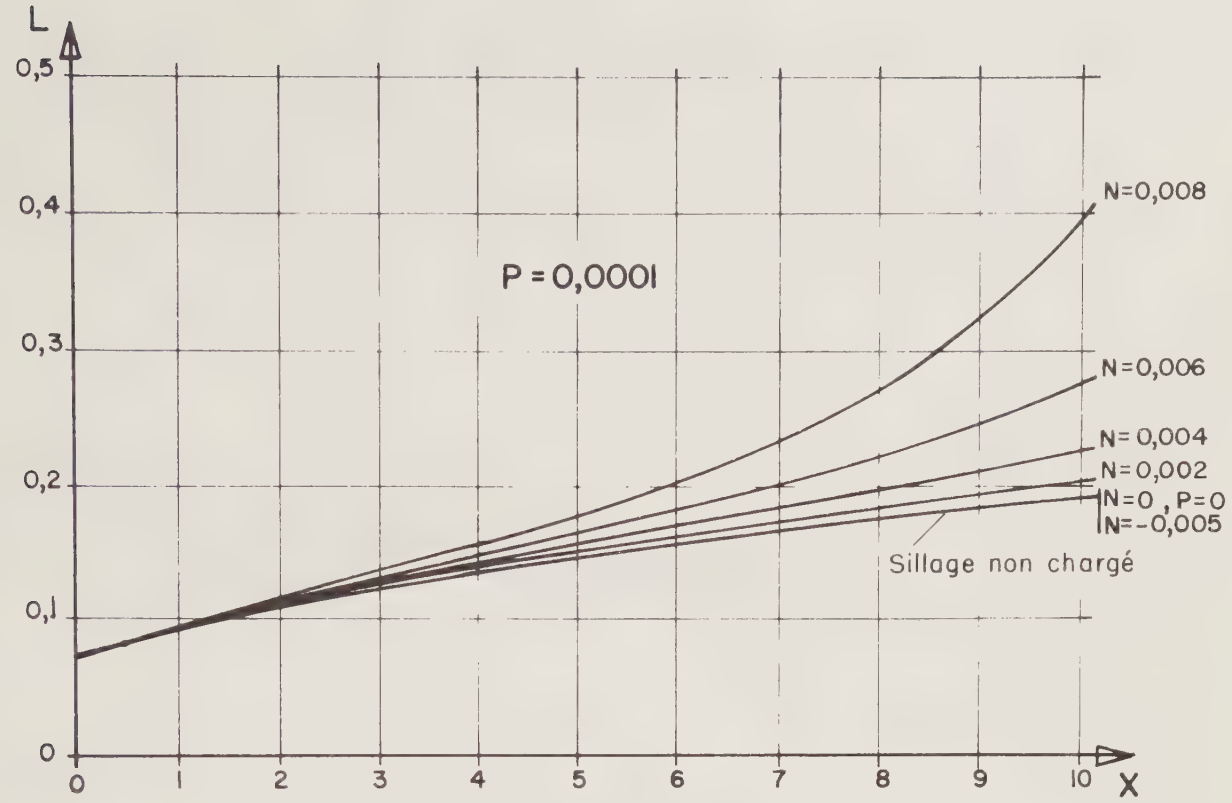


- Fig. 27 a - Largeur relative du sillage.

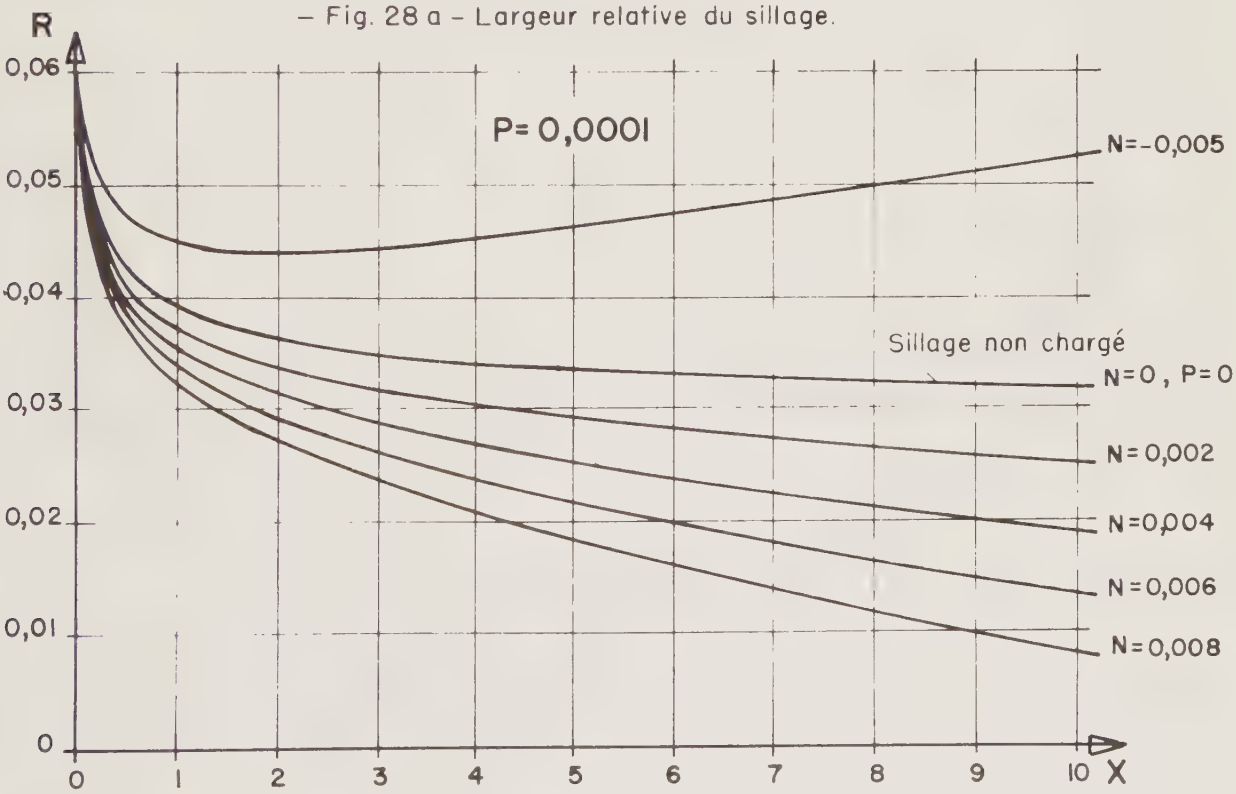


- Fig. 27 b - Débit déficitaire relatif.

Sillage chargé confiné

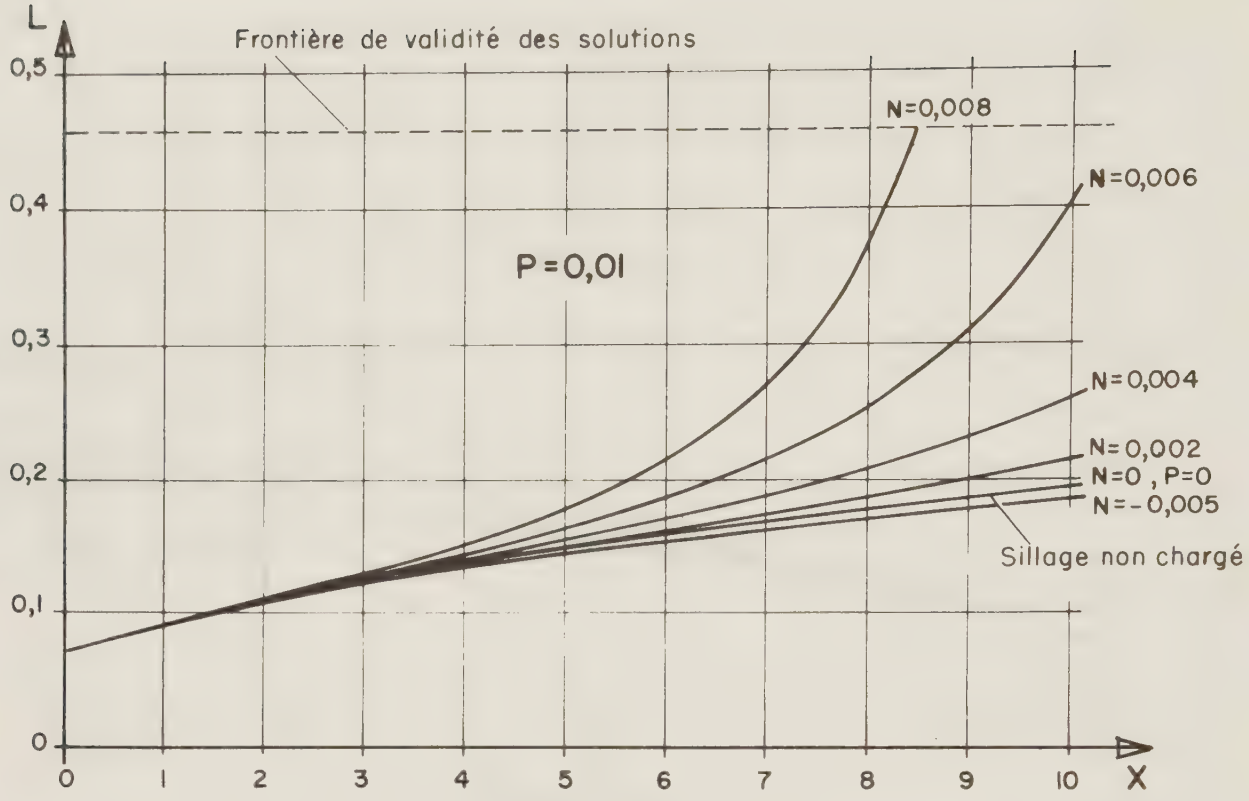


– Fig. 28 a – Largeur relative du sillage.

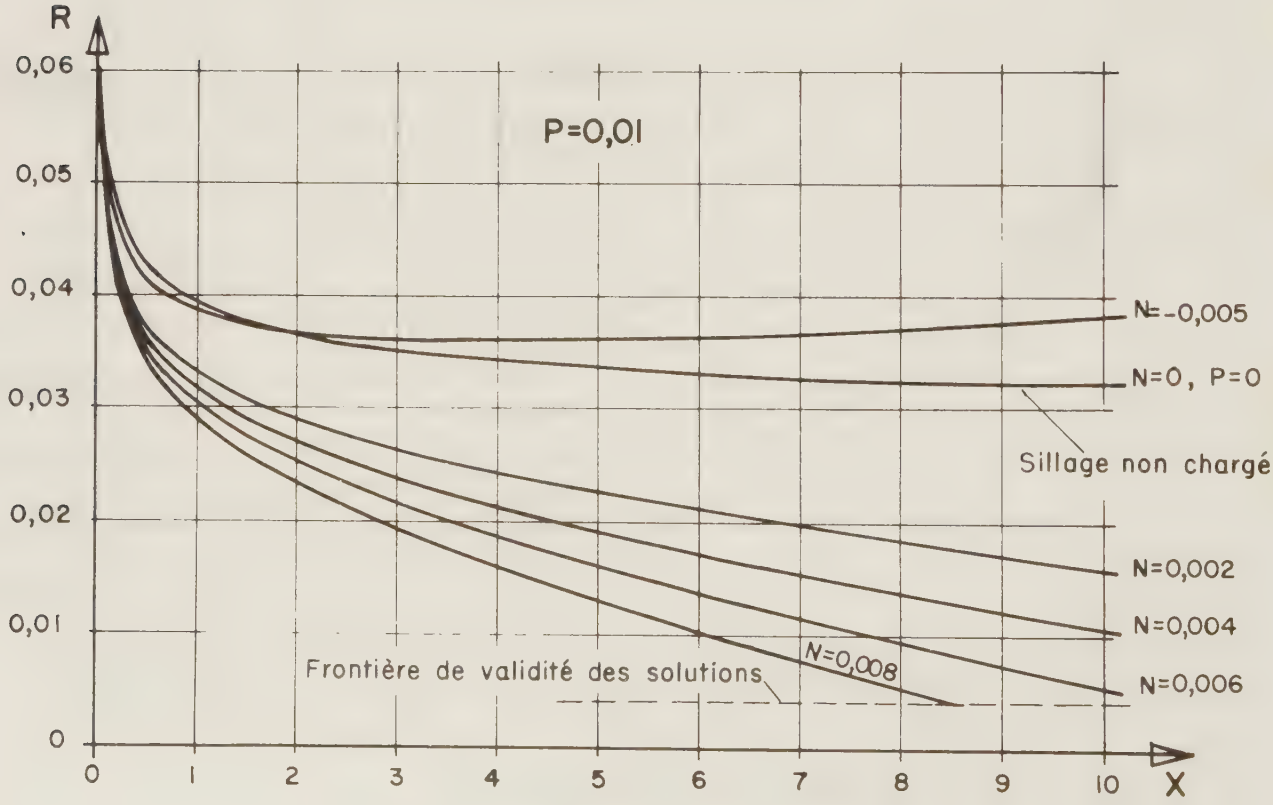


– Fig. 28 b – Débit déficitaire relatif.

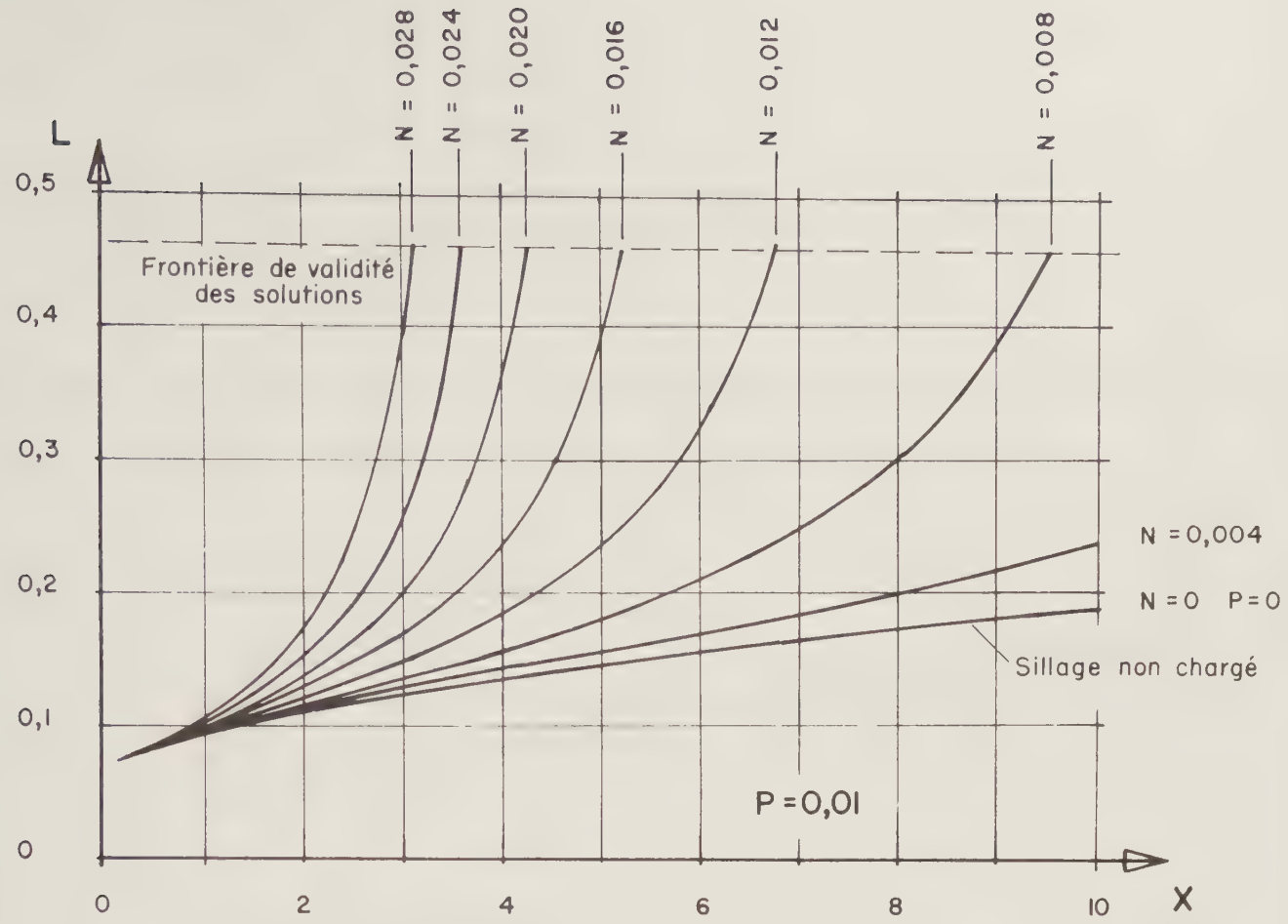
Sillage chargé confiné



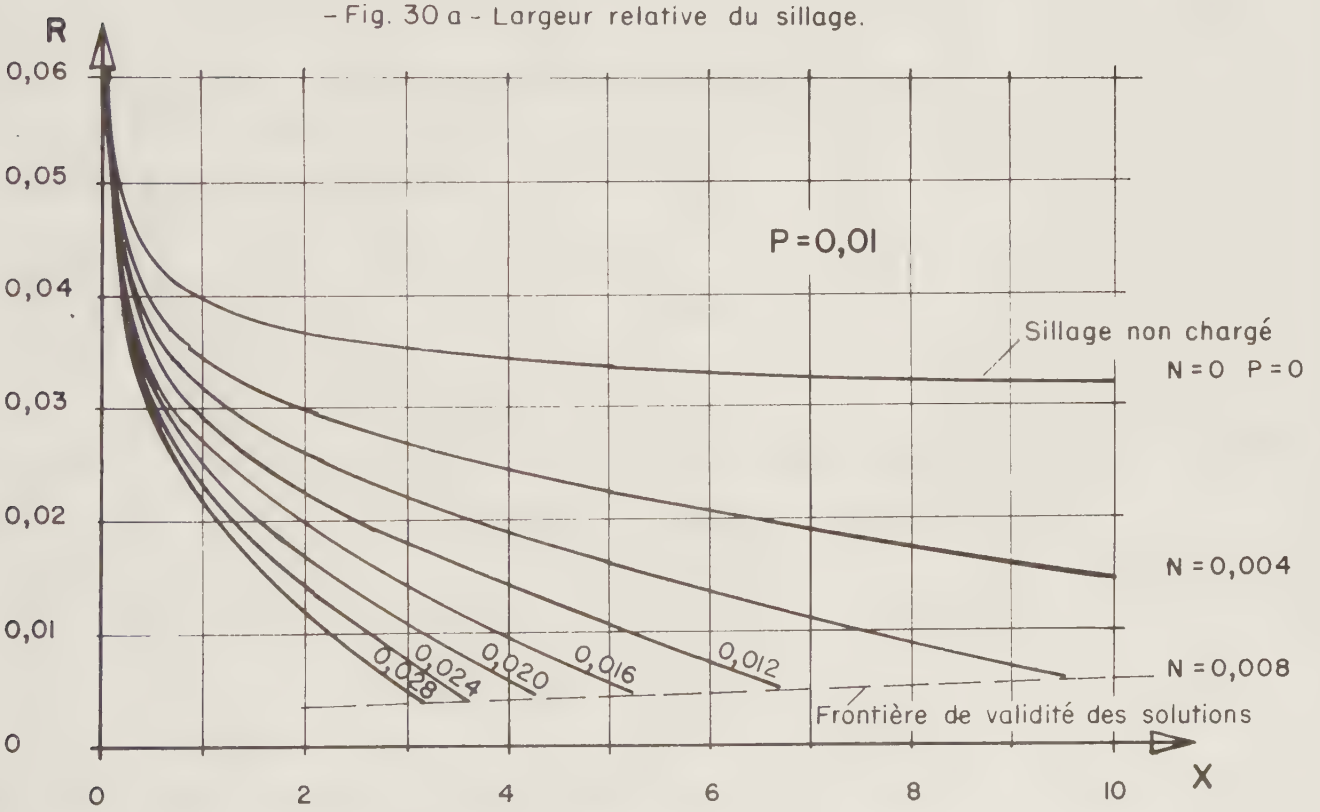
– Fig. 29 a – Largeur relative du sillage.



– Fig. 29 b – Débit déficitaire relatif.



– Fig. 30 a – Largeur relative du sillage.



– Fig. 30 b – Débit déficitaire relatif.

Sillage chargé confiné

Influence du champ aligné sur l'amortissement de la vitesse déficitaire

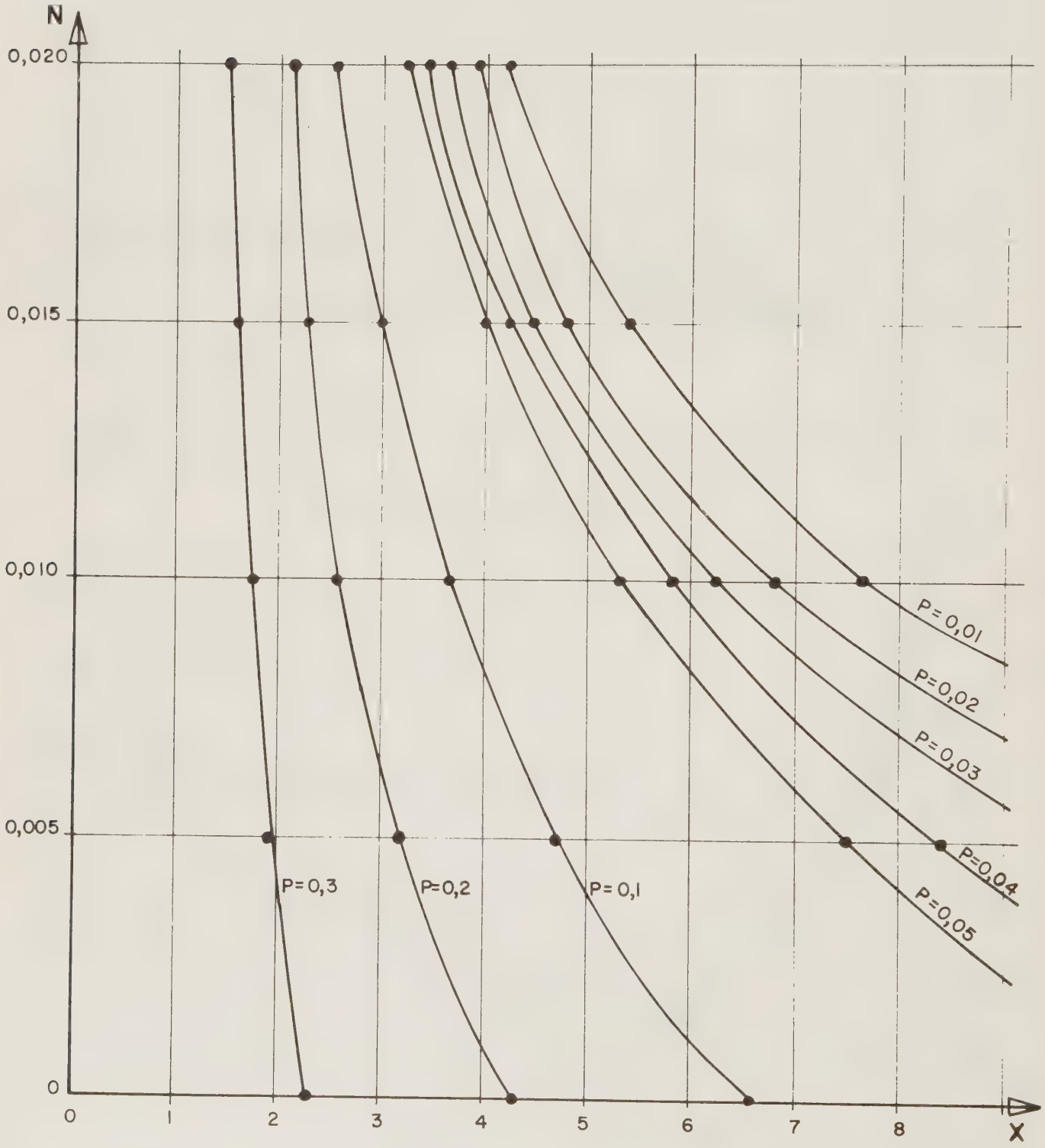
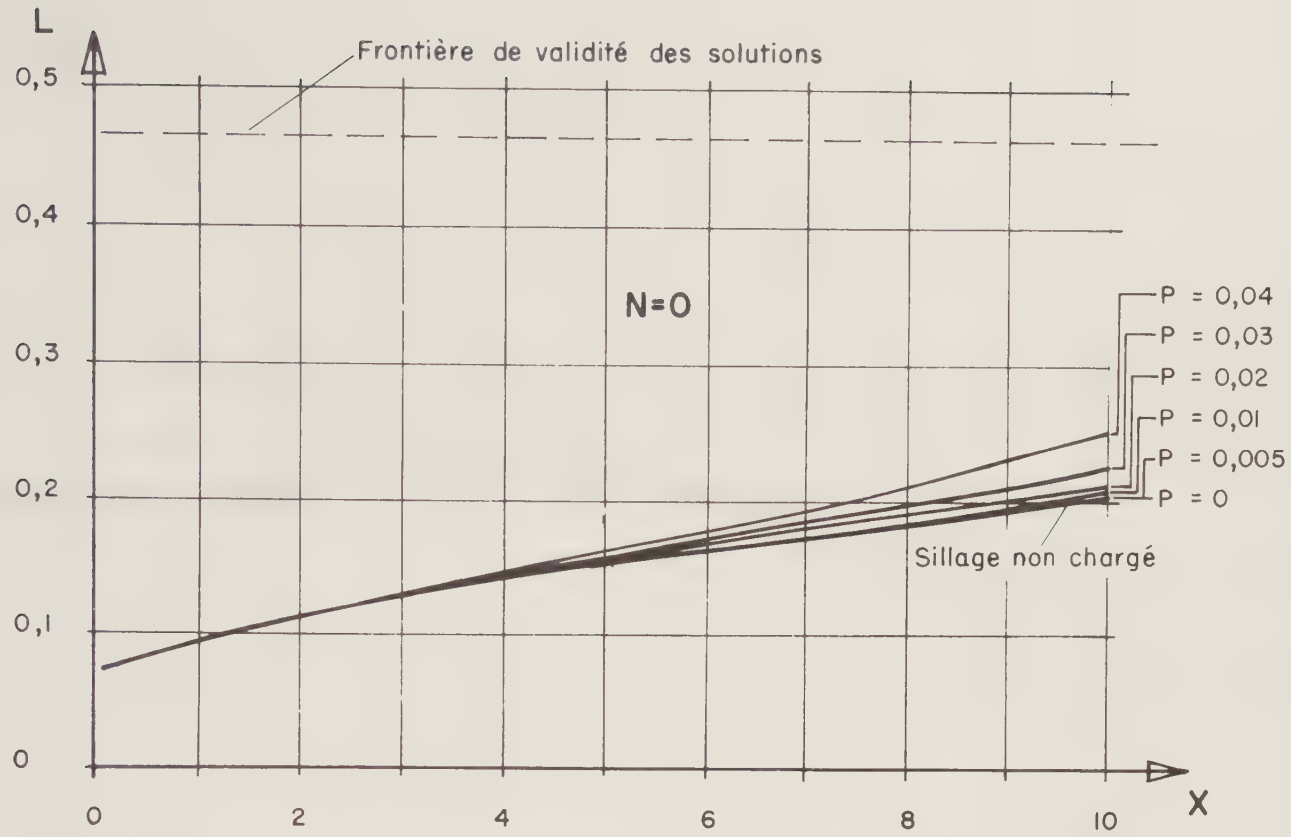
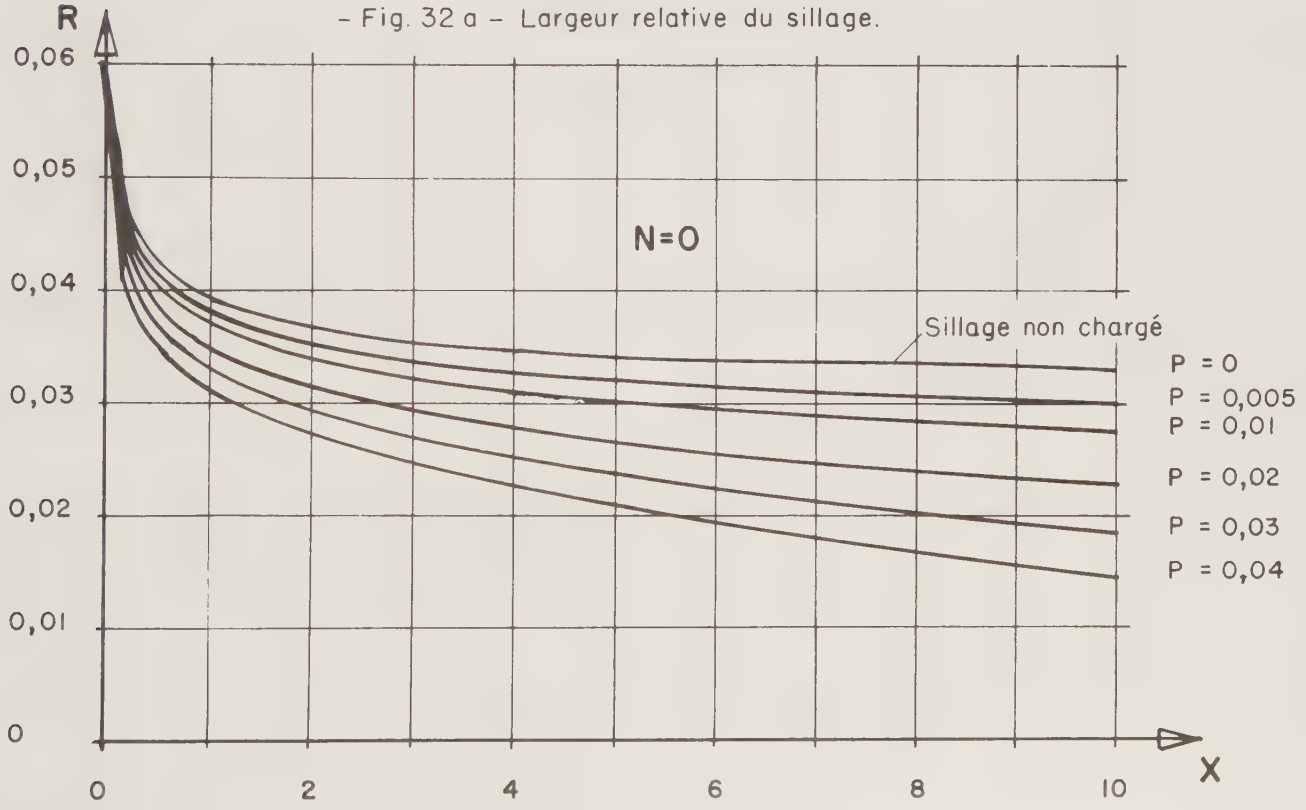


fig. 31

Sillage chargé confiné

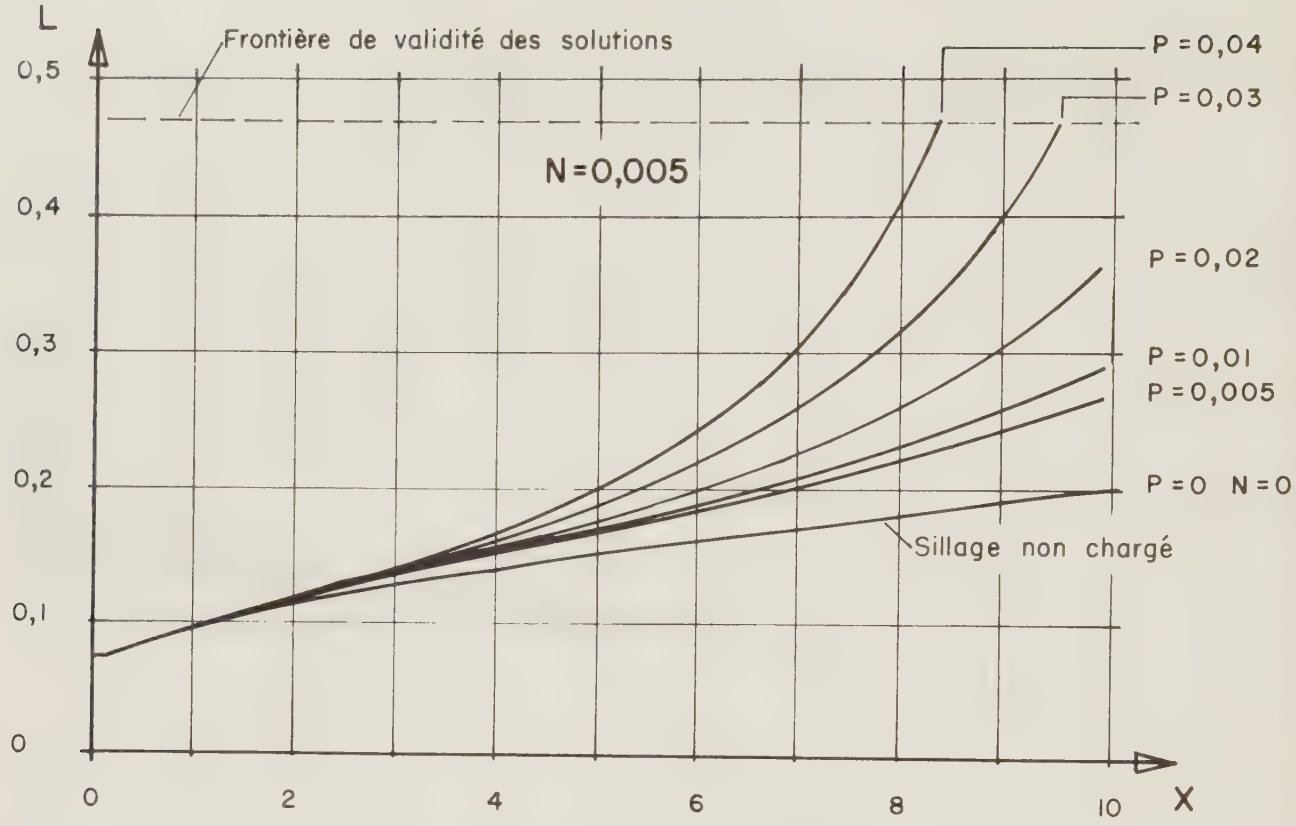


– Fig. 32 a – Largeur relative du sillage.

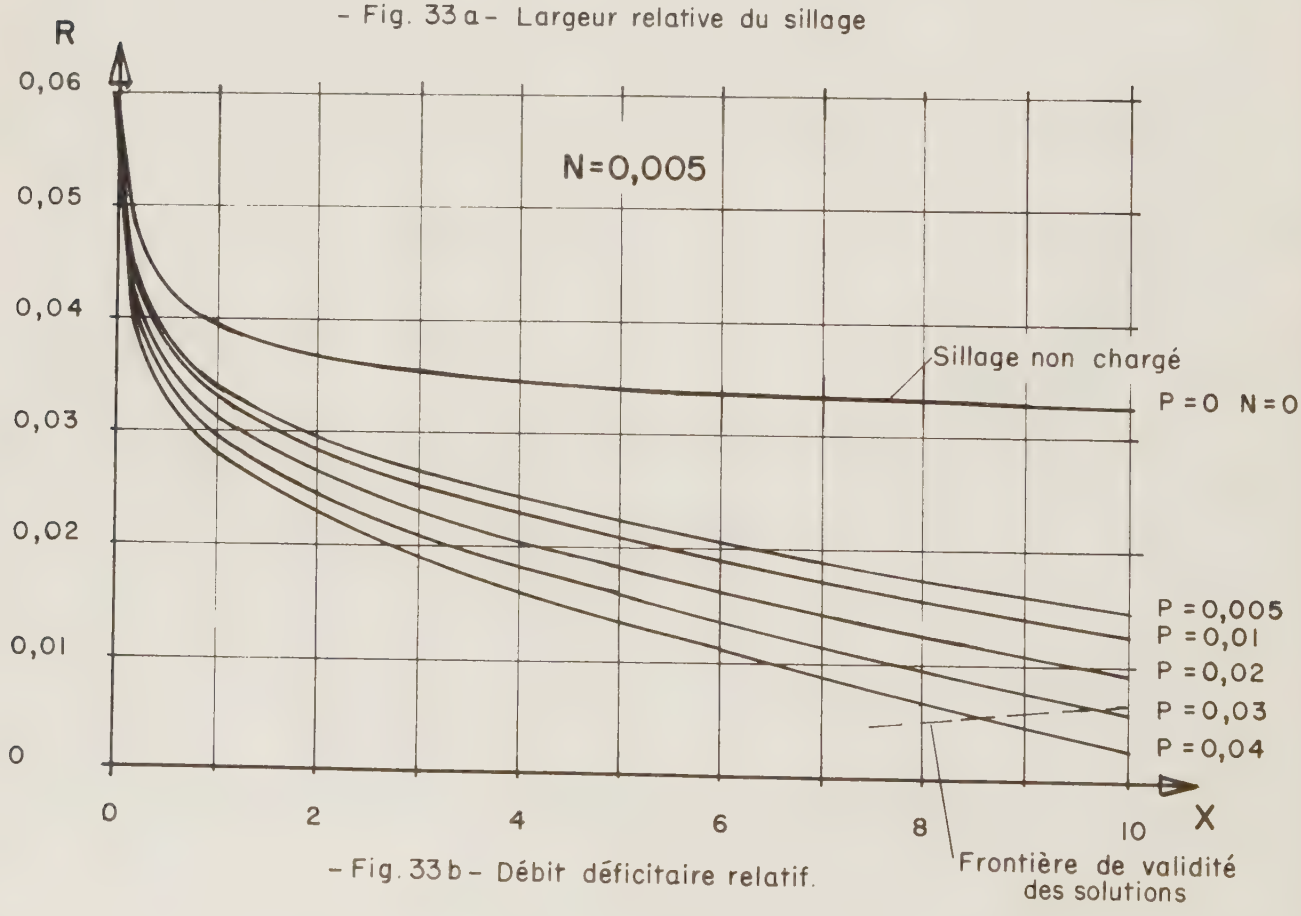


– Fig. 32 b – Débit déficitaire relatif.

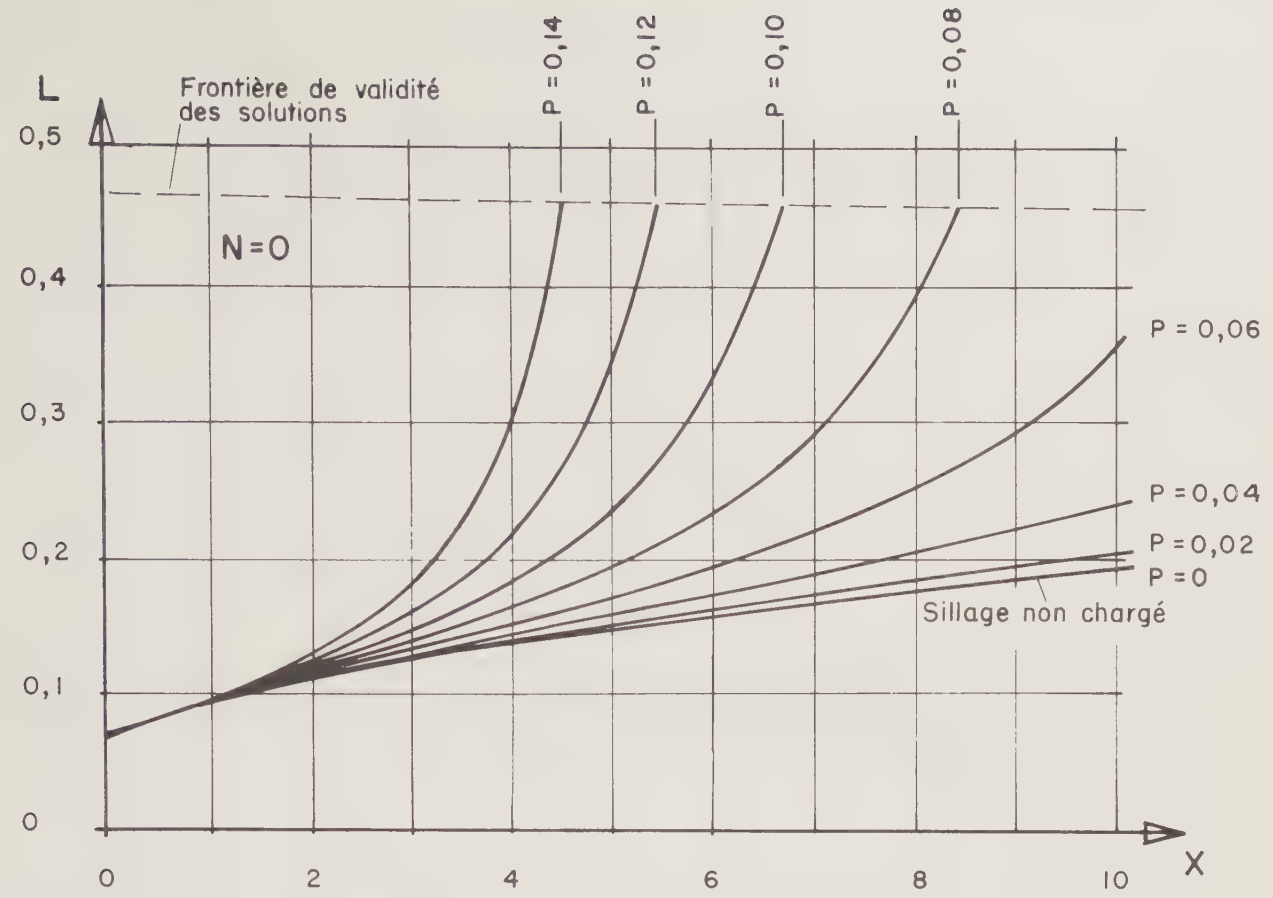
Sillage chargé confiné



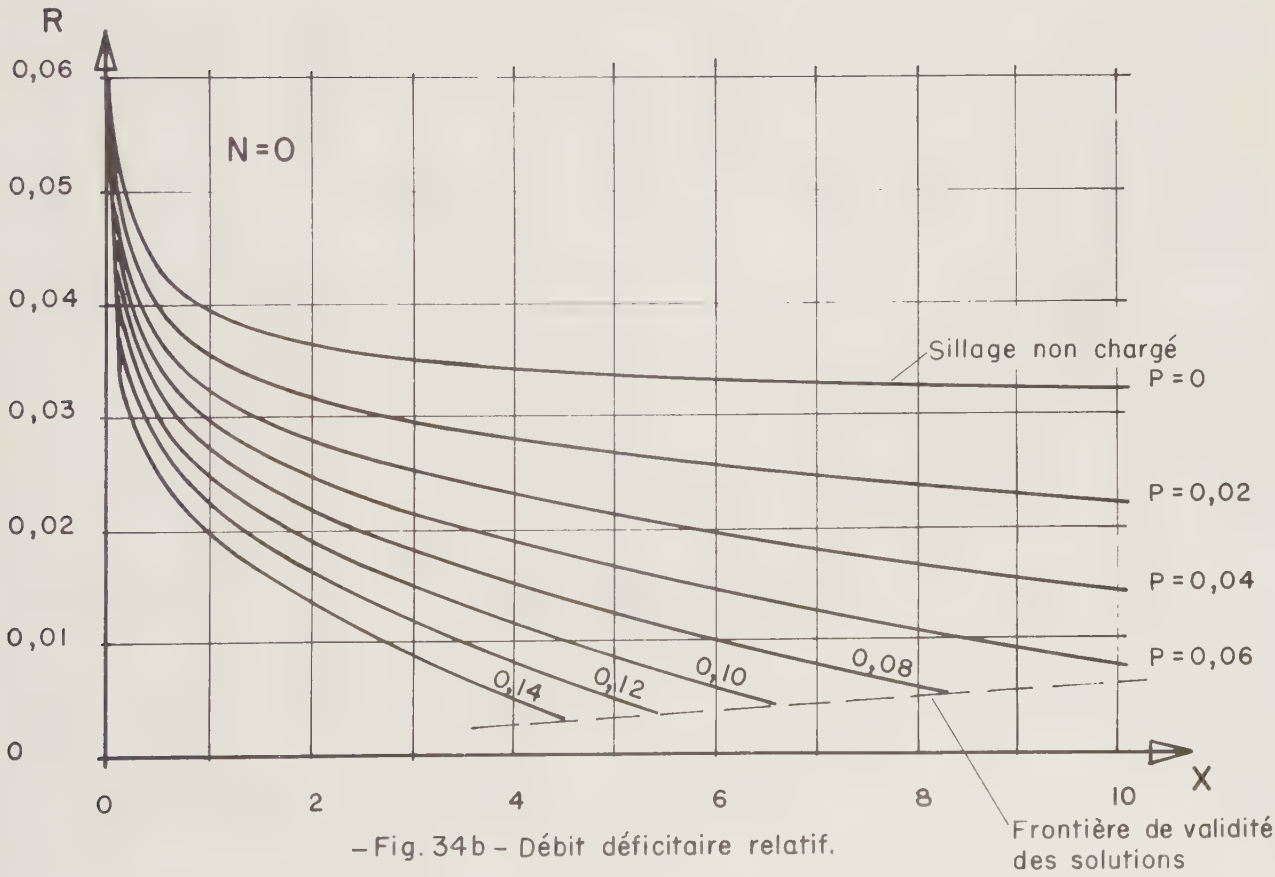
- Fig. 33 a - Largeur relative du sillage



- Fig. 33 b - Débit déficitaire relatif.

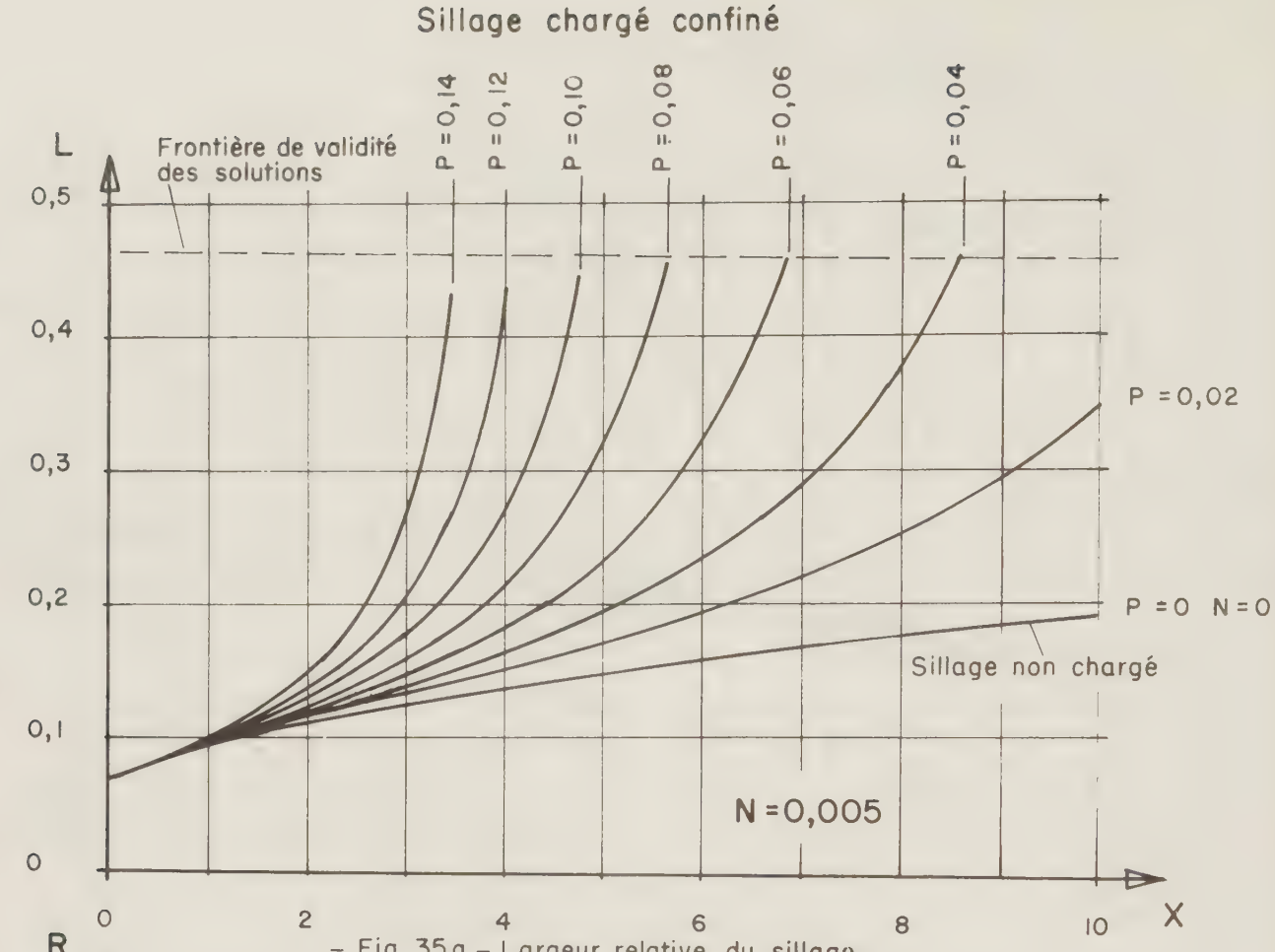


– Fig. 34a – Largeur relative du sillage.

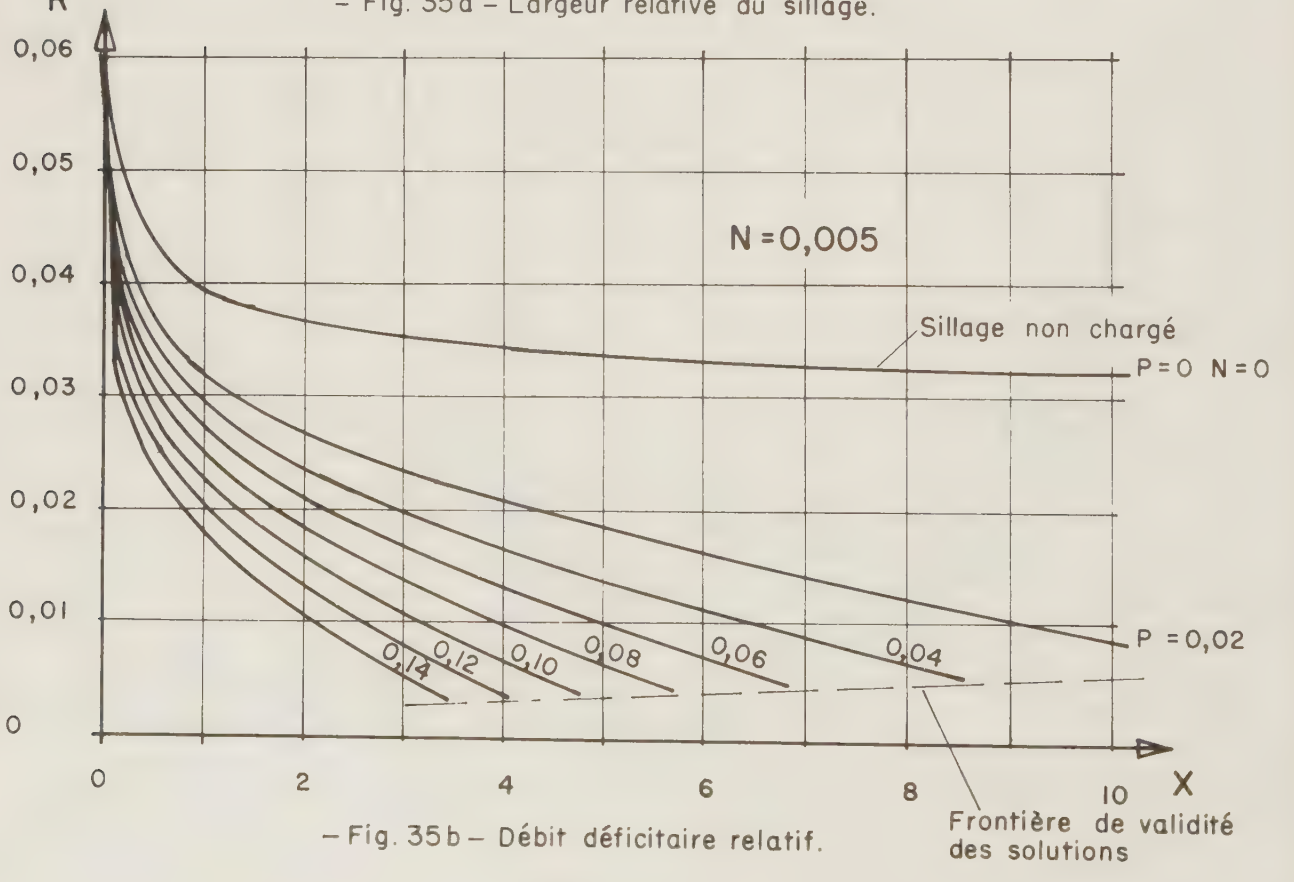


– Fig. 34b – Débit déficitaire relatif.

Sillage chargé confiné



– Fig. 35a – Largeur relative du sillage.



– Fig. 35b – Débit déficitaire relatif.

Influence de l'injection des charges
sur l'amortissement de la vitesse déficitaire

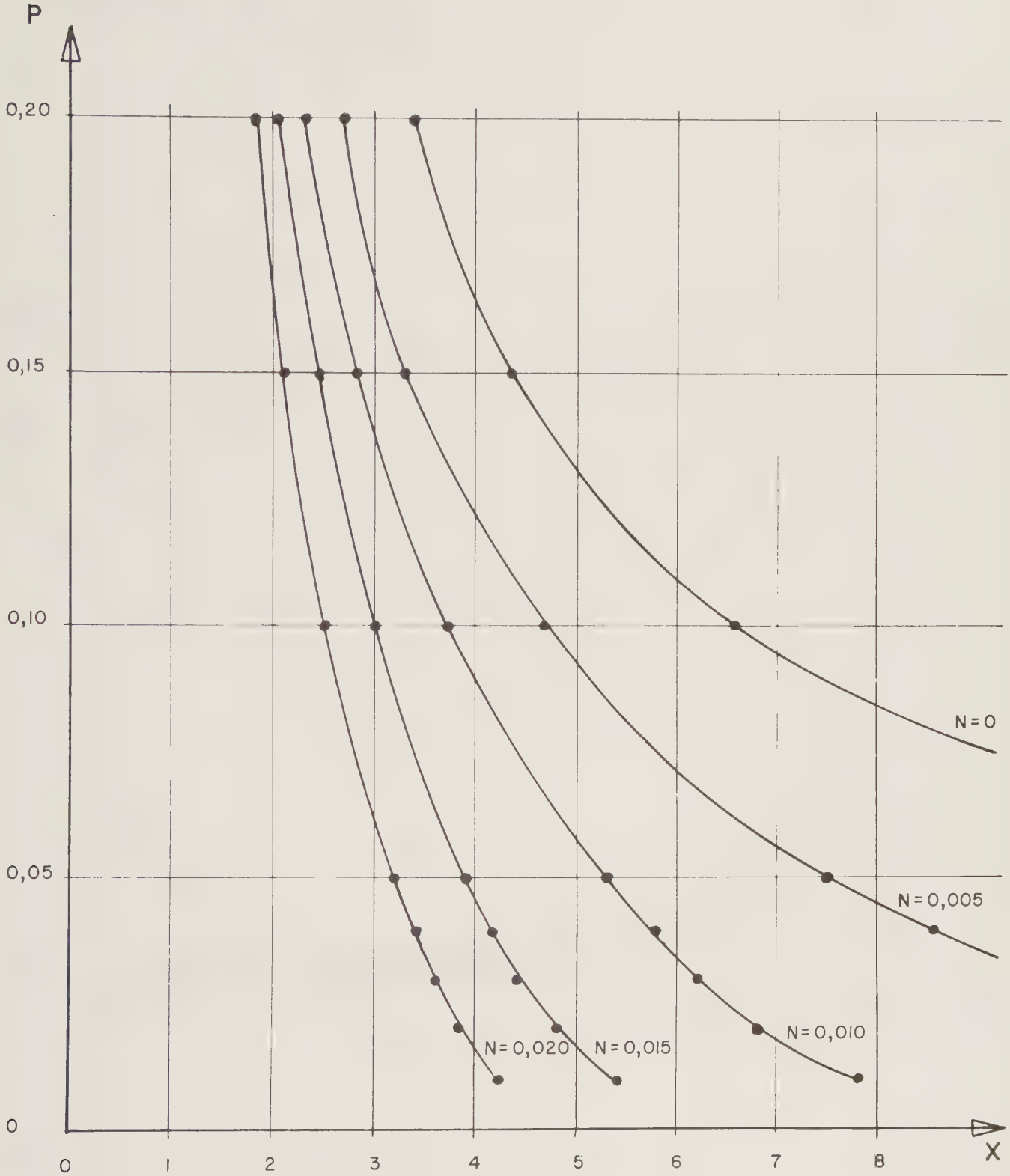
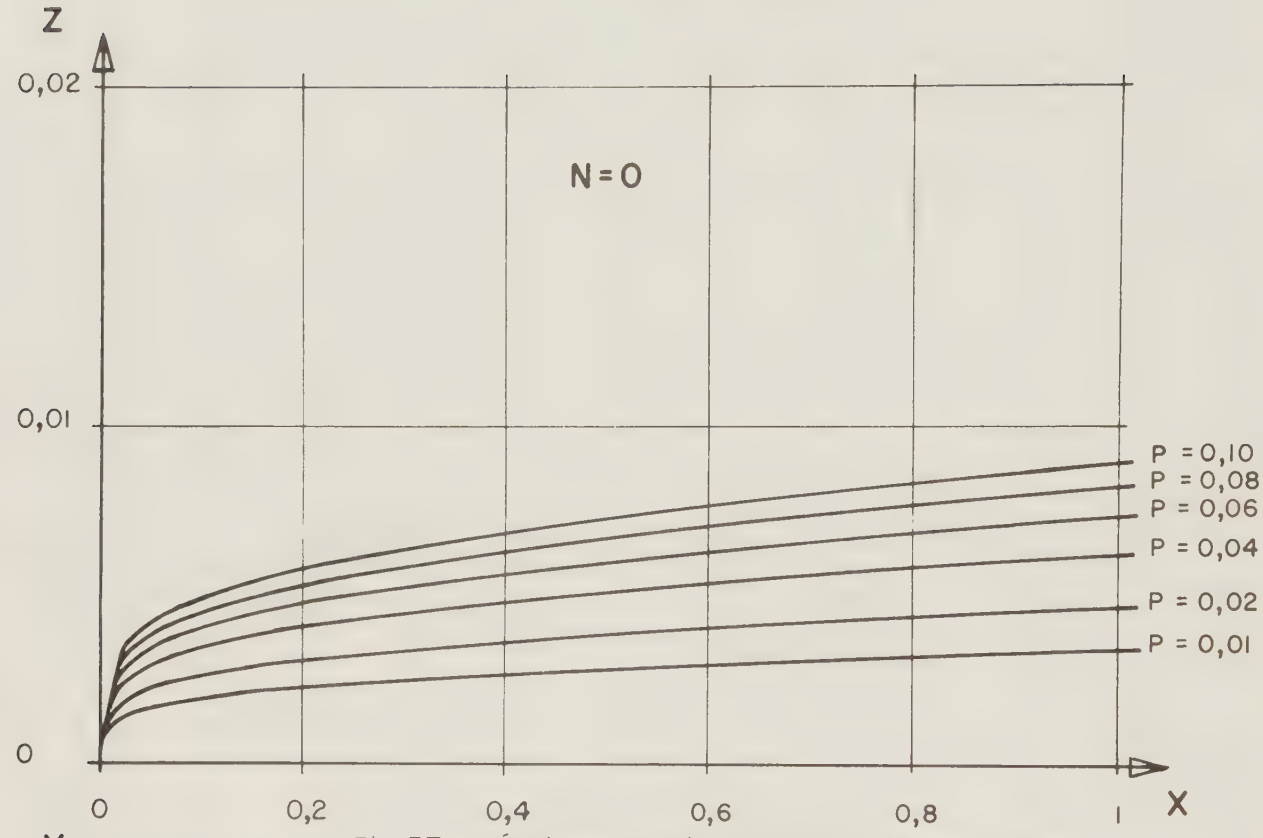
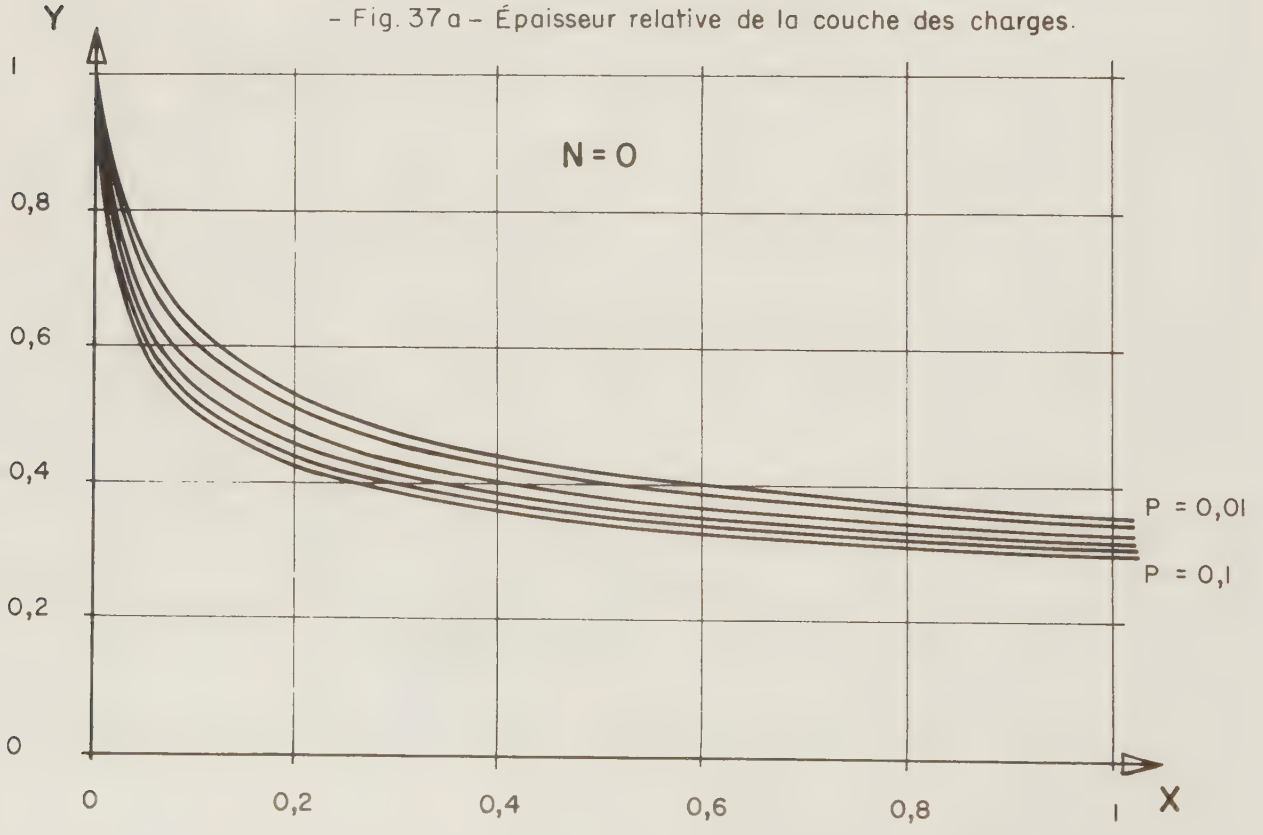


fig. 36

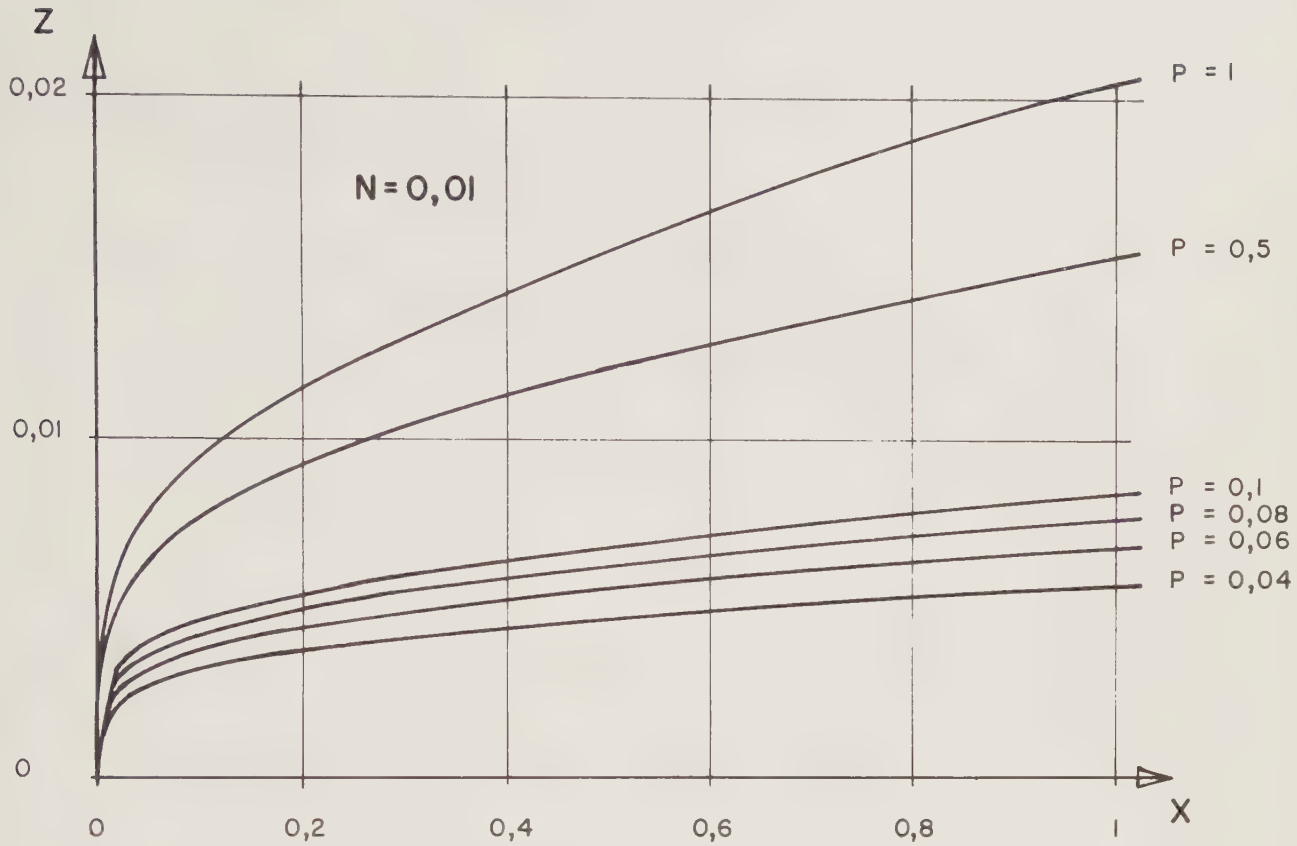


– Fig. 37 a – Épaisseur relative de la couche des charges.

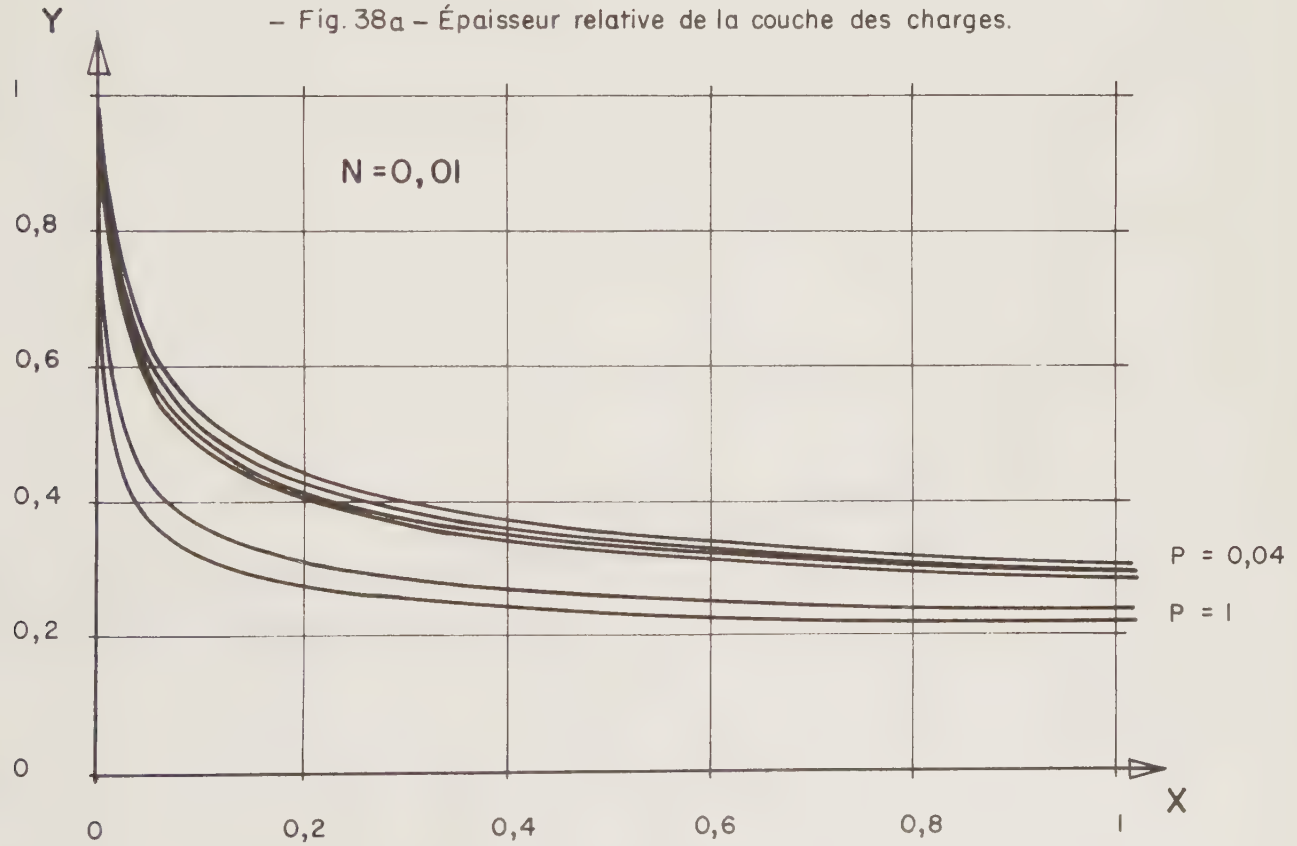


– Fig. 37 b – Charge totale à travers une section

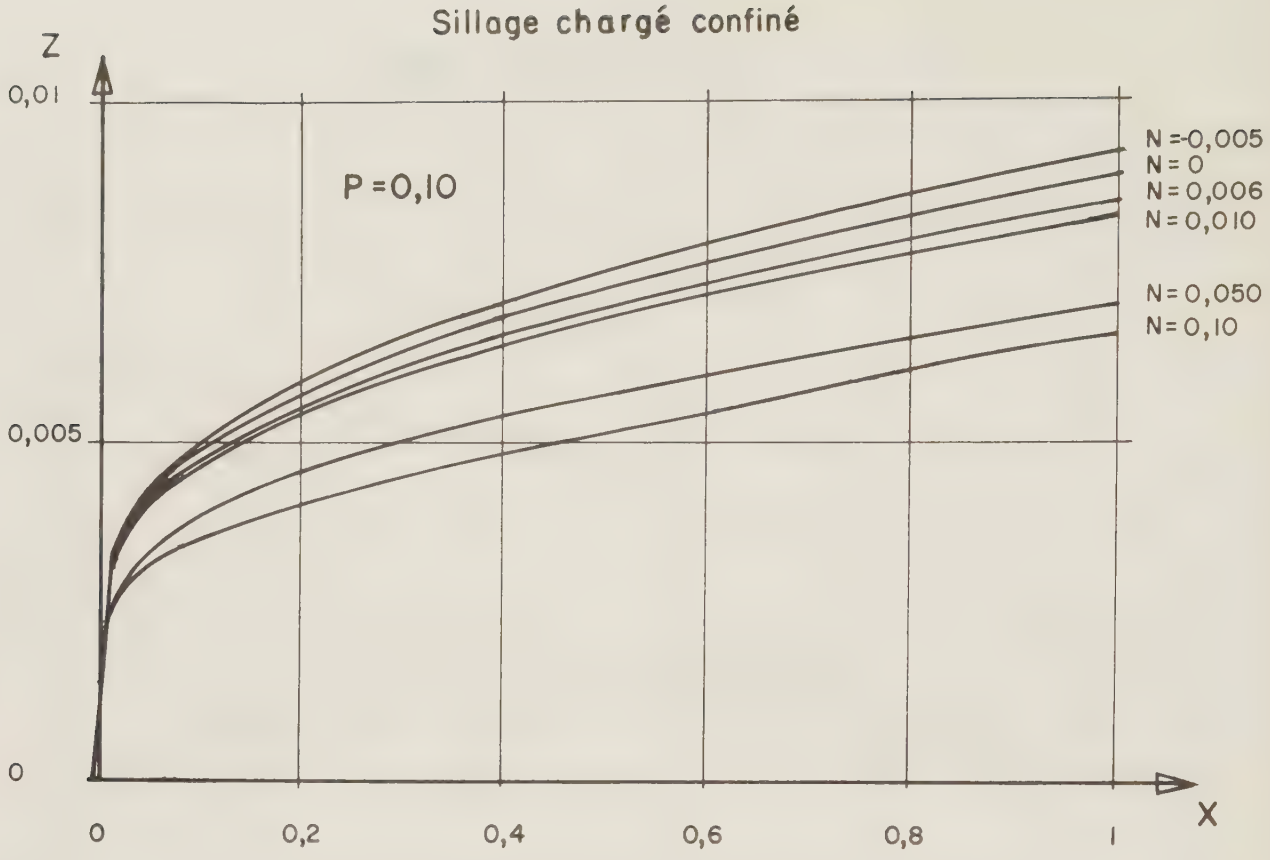
Sillage chargé confiné



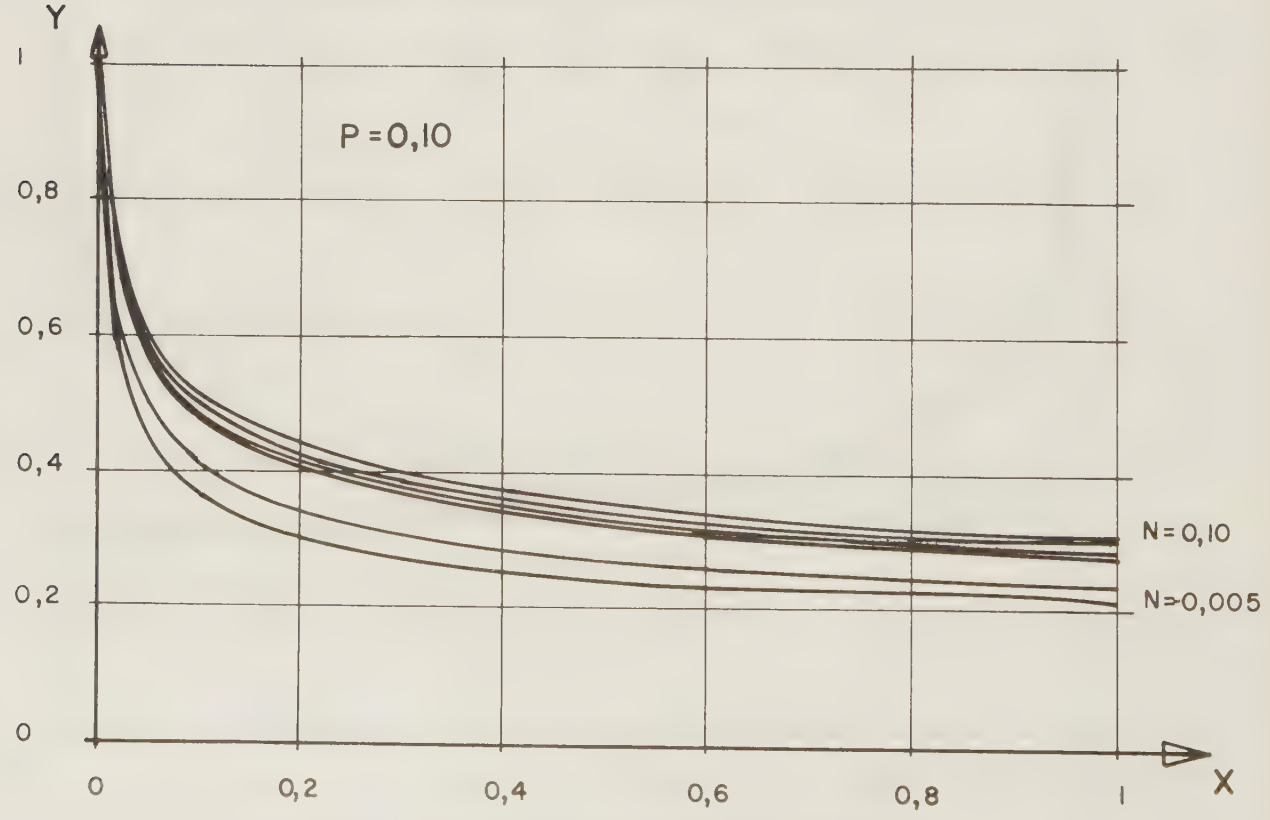
– Fig. 38a – Épaisseur relative de la couche des charges.



– Fig. 38b – Charge totale à travers une section.



– Fig. 39a – Épaisseur relative de la couche des charges.



– Fig. 39b – Charge totale à travers une section.

Annexe

Résolution des équations differentielles N^{os} (V-1-44) à (V-1-48) : Sillage chargé confiné .

```
PAGE   1

// JOB

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0002        0002        0000

V2 M09   ACTUAL  8K  CONFIG  8K

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*ARITHMETIC TRACE
*TRANSFER TRACE
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE RKGS(PRMT,Y,DERY,NDIM,IHLF,FCT,OUTP,AUX)                RKGS   1
      EXTERNAL FCT,OUTP
      DIMENSION Y(1),DERY(1),AUX(8,3),A(4),B(4),C(4),PRMT(5)
      CALL TSTOP
      DO 1 I=1,NDIM                                                      RKGS   3
    1 AUX(8,I)=.0666667*DERY(I)                                          RKGS   4
      X=PRMT(1)                                                          RKGS   5
      XEND=PRMT(2)                                                       RKGS   6
      H=PRMT(3)                                                          RKGS   7
      PRMT(5)=0.                                                         RKGS   8
      CALL FCT(X,Y,DERY)                                                 RKGS   9
C     ERROR TEST                                                         RKGS  10
      IF(H*(XEND-X))38,37,2                                              RKGS  11
C     PREPARATIONS FOR RUNGE-KUTTA METHOD                                RKGS  12
    2 A(1)=.5                                                            RKGS  13
      A(2)=.2928932                                                      RKGS  14
      A(3)=1.707107                                                      RKGS  15
      A(4)=.1666667                                                      RKGS  16
      B(1)=2.                                                            RKGS  17
      B(2)=1.                                                            RKGS  18
      B(3)=1.                                                            RKGS  19
      B(4)=2.                                                            RKGS  20
      C(1)=.5                                                            RKGS  21
      C(2)=.2928932                                                      RKGS  22
      C(3)=1.707107                                                      RKGS  23
      C(4)=.5                                                            RKGS  24
C     PREPARATIONS OF FIRST RUNGE-KUTTA STEP                             RKGS  25
      DO 3 I=1,NDIM                                                      RKGS  26
      AUX(1,I)=Y(I)                                                      RKGS  27
      AUX(2,I)=DERY(I)                                                   RKGS  28
      AUX(3,I)=0.                                                        RKGS  29
    3 AUX(6,I)=0.                                                        RKGS  30
      IREC=0                                                             RKGS  31
      H=H+H                                                              RKGS  32
      IHLF=-1                                                            RKGS  33
      ISTEP=0                                                            RKGS  34
      IEND=0                                                             RKGS  35
C     START OF A RUNGE-KUTTA STEP                                        RKGS  36
4     CALL TSTRT
      IF((X+H-XEND)*H)7,6,5                                              RKGS  37
    5 H=XEND-X                                                           RKGS  38
    6 IEND=1                                                             RKGS  39
C     RECORDING OF INITIAL VALUES OF THIS STEP                           RKGS  40
    7 CALL OUTP(X,Y,DERY,IREC,NDIM,PRMT)                                 RKGS  41
      CALL TSTOP
      IF(PRMT(5))40,8,40                                                 RKGS  42
    8 ITEST=0                                                            RKGS  43
    9 ISTEP=ISTEP+1                                                      RKGS  44
```

```
C       START OF INNERMOST RUNGE-KUTTA LOOP                                     RKGS  45
        J=1                                                                     RKGS  46
   10   AJ=A(J)                                                                 RKGS  47
        BJ=B(J)                                                                 RKGS  48
        CJ=C(J)                                                                 RKGS  49
        DO 11 I=1,NDIM                                                          RKGS  50
        R1=H*DERY(I)                                                            RKGS  51
        R2=AJ*(R1-BJ*AUX(6,I))                                                  RKGS  52
        Y(I)=Y(I)+R2                                                            RKGS  53
        R2=R2+R2+R2                                                             RKGS  54
   11   AUX(6,I)=AUX(6,I)+R2-CJ*R1                                              RKGS  55
        IF(J-4)12,15,15                                                         RKGS  56
   12   J=J+1                                                                   RKGS  57
        IF(J-3)13,14,13                                                         RKGS  58
   13   X=X+.5*H                                                                RKGS  59
   14   CALL FCT(X,Y,DERY)                                                      RKGS  60
        GOTO 10                                                                 RKGS  61
C       END OF INNERMOST RUNGE-KUTTA LOOP                                       RKGS  62
C       TEST OF ACCURACY                                                        RKGS  63
   15   IF(ITEST)16,16,20                                                       RKGS  64
C       IN CASE ITEST=0 THERE IS NO POSSIBILITY FOR TESTING OF ACCURACY         RKGS  65
   16   DO 17 I=1,NDIM                                                          RKGS  66
   17   AUX(4,I)=Y(I)                                                           RKGS  67
        ITEST=1                                                                 RKGS  68
        ISTEP=ISTEP+ISTEP-2                                                     RKGS  69
   18   IHLF=IHLF+1                                                             RKGS  70
        X=X-H                                                                   RKGS  71
        H=.5*H                                                                  RKGS  72
        DO 19 I=1,NDIM                                                          RKGS  73
        Y(I)=AUX(1,I)                                                           RKGS  74
        DERY(I)=AUX(2,I)                                                        RKGS  75
   19   AUX(6,I)=AUX(3,I)                                                       RKGS  76
        GOTO 9                                                                  RKGS  77
C       IN CASE ITEST=1 TESTING OF ACCURACY IS POSSIBLE                         RKGS  78
   20   IMOD=ISTEP/2                                                            RKGS  79
        IF(ISTEP-IMOD-IMOD)21,23,21                                             RKGS  80
   21   CALL FCT(X,Y,DERY)                                                      RKGS  81
        DO 22 I=1,NDIM                                                          RKGS  82
        AUX(5,I)=Y(I)                                                           RKGS  83
   22   AUX(7,I)=DERY(I)                                                        RKGS  84
        GOTO 9                                                                  RKGS  85
C       COMPUTATION OF TEST VALUE DELT                                          RKGS  86
   23   DELT=0.                                                                 RKGS  87
        DO 24 I=1,NDIM                                                          RKGS  88
   24   DELT=DELT+AUX(8,I)*ABS(AUX(4,I)-Y(I))                                   RKGS  89
        IF(DELT-PRMT(4))28,28,25                                                RKGS  90
C       ERROR IS TOO GREAT                                                      RKGS  91
   25   IF(IHLF-10)26,36,36                                                     RKGS  92
   26   DO 27 I=1,NDIM                                                          RKGS  93
   27   AUX(4,I)=AUX(5,I)                                                       RKGS  94
        ISTEP=ISTEP+ISTEP-4                                                     RKGS  95
        X=X-H                                                                   RKGS  96
        IEND=0                                                                  RKGS  97
        GOTO 18                                                                 RKGS  98
C       RESULT VALUES ARE GOOD                                                  RKGS  99
   28   CALL FCT(X,Y,DERY)                                                      RKGS 100
        DO 29 I=1,NDIM                                                          RKGS 101
        AUX(1,I)=Y(I)                                                           RKGS 102
        AUX(2,I)=DERY(I)                                                        RKGS 103
        AUX(3,I)=AUX(6,I)                                                       RKGS 104
```

```
      Y(I)=AUX(5,I)                                                    RKGS 105
   29 DERY(I)=AUX(7,I)                                                 RKGS 106
      CALL OUTP(X-H,Y,DERY,IHLF,NDIM,PRMT)                             RKGS 107
      IF(PRMT(5))40,30,40                                              RKGS 108
   30 DO 31 I=1,NDIM                                                   RKGS 109
      Y(I)=AUX(1,I)                                                    RKGS 110
   31 DERY(I)=AUX(2,I)                                                 RKGS 111
      IREC=IHLF                                                        RKGS 112
      IF(IEND)32,32,39                                                 RKGS 113
C     INCREMENT GETS DOUBLED                                           RKGS 114
   32 IHLF=IHLF-1                                                      RKGS 115
      ISTEP=ISTEP/2                                                    RKGS 116
      H=H+H                                                            RKGS 117
      IF(IHLF)4,33,33                                                  RKGS 118
   33 IMOD=ISTEP/2                                                     RKGS 119
      IF(ISTEP-IMOD-IMOD)4,34,4                                        RKGS 120
   34 IF(DELT-.02*PRMT(4))35,35,4                                      RKGS 121
   35 IHLF=IHLF-1                                                      RKGS 122
      ISTEP=ISTEP/2                                                    RKGS 123
      H=H+H                                                            RKGS 124
      GOTO 4                                                           RKGS 125
C     RETURNS TO CALLING PROGRAM                                       RKGS 126
   36 IHLF=11                                                          RKGS 127
      CALL FCT(X,Y,DERY)                                               RKGS 128
      GOTO 39                                                          RKGS 129
   37 IHLF=12                                                          RKGS 130
      GOTO 39                                                          RKGS 131
   38 IHLF=13                                                          RKGS 132
   39 CALL OUTP(X,Y,DERY,IHLF,NDIM,PRMT)                               RKGS 133
   40 RETURN                                                           RKGS 134
      END                                                              RKGS 135

FEATURES SUPPORTED
 TRANSFER TRACE
 ARITHMETIC TRACE
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR RKGS
 COMMON      0  VARIABLES     58  PROGRAM   1130

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0055 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*DELETE              RKGS
CART ID 0002   DB ADDR  31D6   DB CNT   004E

*STORE      WS  UA  RKGS
CART ID 0002   DB ADDR  361F   DB CNT   004E

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE FCT(X,Y,DERY)
      DIMENSION Y(3),DERY(3)
      COMMON AL,EN,P,Q,EM
      R=Y(1)
      EL=Y(2)
```

```
      Z=Y(3)
      RSL=Y(1)/Y(2)
      RSL2=RSL*RSL
      S=Y(3)/Y(2)
      CC=0.707107
      CO=1.414214*0.31831
      T=0.03
      T1=0.131846
      T2=0.63662
      T3=0.5
      T4=T2*(S-1.)
      T5=0.5*T2*((1.414214*S)-1.)
      T6=(0.5*S*T2*(1.+T2))-(CC*T2*T2)
      T7=(0.25*S*T2)*(1.+T2)
      AC=2.*CC*T2
      AA=(2.*(T6-T7))/AC
      SS=1./((Z*Z)-(EL*EL))
      SSS=SQRT(SS)
      U=1./(1.+R-RSL)
      SSR=1.-SSS
      SSL=R*EL*SS*SSS
      SSZ=R*Z*SS*SSS
      YY=AL/(1.+R-(R*SSS))
      YYY=YY*YY
      YYYY=YYY*YY
      H1=(Z*Z*YY)/AL
      F=0.0000001
      A1=H1*SSR
      B1=H1*SSL
      C1=(H1*SSZ)+Z
      D1=(F*U)+(Q*YY*U)
      H2=(AC*P*YYYY*Z)/AL
      A2=(3.*R)+(1.)-(2.*CC*RSL)-(H2*SSR)
      B2=(CC*RSL2)-(H2*SSL)
      C2=(CO*P*YYY)-(H2*SSZ)
      D2=-(EN*YY)-(0.5*P*YYY)
      H3=AA*H2
      A3=(((2.*T1)-T3)*RSL)+(R*T2)-(H3*SSR)
      B3=((1.+R)*RSL*T2)-(T1*RSL2)-(H3*SSL)
      C3=(P*YYY*T6)-(H3*SSZ)
      D3=(T*RSL2)-(T4*EN*YY)-(T5*P*YYY)
      DEL1=(B2*C3)-(B3*C2)
      DEL2=(A2*C3)-(A3*C2)
      DEL3=(A2*B3)-(A3*B2)
      E1=(D2*C3)-(D3*C2)
      E2=(D2*B3)-(D3*B2)
      E3=(A2*D3)-(A3*D2)
      DEL=(A1*DEL1)-(B1*DEL2)+(C1*DEL3)
      DELR=(D1*DEL1)-(B1*E1)+(C1*E2)
      DELL=(A1*E1)-(D1*DEL2)+(C1*E3)
      DELZ=-(A1*E2)-(B1*E3)+(D1*DEL3)
      DERY(1)=DELR/DEL
      DERY(2)=DELL/DEL
      DERY(3)=DELZ/DEL
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR FCT
 COMMON      10  VARIABLES     114  PROGRAM     714
```

```
PAGE   5

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 008A (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*DELETE              FCT
CART ID 0002   DB ADDR  3588   DB CNT   001D

*STORE      WS  UA  FCT
CART ID 0002   DB ADDR  3650   DB CNT   003C

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE OUTP(X,Y,DERY,IHLF,NDIM,PRMT)
      DIMENSION Y(3),DERY(3),PRMT(5)
      COMMON AL
      SSS=1./SQRT((Y(2)*Y(2))+(Y(3)*Y(3)))
      YY=AL/(1.+(Y(1)*(1.-SSS)))
      IF(Y(2)-0.47) 10,11,11
10    WRITE(3,100) X,Y,YY
100   FORMAT(5(5X,F14.4))
      GOTO 12
11    PRMT(5)=1.
12    CONTINUE
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR OUTP
 COMMON      2  VARIABLES     14  PROGRAM    102

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 001B (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*DELETE              OUTP
CART ID 0002   DB ADDR  35B8   DB CNT   000B

*STORE      WS  UA  OUTP
CART ID 0002   DB ADDR  3681   DB CNT   0008

// FOR
*IOCS(1132PRINTER,PLOTTER,CARD)
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      EXTERNAL FCT,OUTP
      COMMON AL,EN,P,Q,EM,PRMT(5),Y(3),DERY(3),YY(1),AUX(8,3),X(100)
      DO2 N=1,4
      EN=0.005*(N)
      DO1 J=1,4
      P =0.05*(J)
      Q=0.001*P
      WRITE(3,300) EN,P
300   FORMAT(5X,'N=',F7.3,5X,'P=',F7.3/)
```

```
      EM=0.03
      CC=0.707107
      DEM=2.*EM
      PRMT(1)=0.0001
      PRMT(2)=10.
      PRMT(3)=0.1
      PRMT(4)=0.001
      Y(1)=DEM
      Y(2)=(CC*DEM*DEM)/((1.5*DEM*DEM)+EM)
      Y(3)=0.01*Y(2)
      DERY(1)=1./3.
      DERY(2)=1./3.
      DERY(3)=1./3.
      NDIM=3
      SSSO=1./SQRT((Y(2)*Y(2))+(Y(3)*Y(3)))
      AL=1.+(Y(1)*(1.-SSSO))
      WRITE(3,301)
301   FORMAT(10X,'X=',18X,'R=',18X,'L=',18X,'Z=',18X,'Y='/)
      CALL RKGS(PRMT,Y,DERY,NDIM,IHLF,FCT,OUTP,AUX)
1     CONTINUE
2     CONTINUE
      CALL EXIT
      END
```

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 282 VARIABLES 22 PROGRAM 296

END OF COMPILATION

BIBLIOGRAPHIE

(1) P. ATTEN et R. MOREAU : Stabilité hydrodynamique des fluides incompressibles isolants soumis à une injection unipolaire.
C. R. Acad. Sc., Paris, t. 269, Série A, p. 433 à 436 et p. 469 à 472, (Sept. 1969).

(2) A. CRAYA et R. CURTET : Sur l'évolution d'un jet en espace confiné.
C. R. Acad. Sc., Paris, Vol. 241, p. 621 à 622, (1955).

(3) P. ATTEN : Etude mathématique du problème du champ électrique affecté par un flux permanent d'ions unipolaires et application à la théorie de la sonde froide.
(Thèse, Université de Grenoble, 1969).

(4) N. FELICI : Recent advances in the analysis of D. C. ionized electric fields.
Direct Current, t. 8, n°9, p. 252 à 260 (Sept. 1963).

(5) H. SCHLICHTING : Boundary Layer Theory, 6ème édition

(6) N. FELICI : Phénomènes hydro et aérodynamiques dans la conduction des diéléctriques fluides.
Rev. Gen. Elect. 78, 717 (1969).

(7) R. MOREAU : Ecoulements laminaires des fluides isolants soumis à une injection unipolaire.
(non-publié).

(8) R. MOREAU : Contribution à l'étude des écoulements hydromagnétiques
(Thèse, Université de Grenoble, 1967).

(9) G. A. OSTROUMOV : Sur l'hydrodynamique des décharges électriques.
Z. Tekh. Fiz. (U. R. S. S.) 24, (1954), p. 1915 à 1919.

(10) O. M. STUETZER : Magnetohydrodynamics and Electro-hydrodynamics.
Phys. Fluids 5, 5, (1962), p. 534.

(11) W. F. PICKARD : Progress in Dielectrics. 1-39
Academic Press, New-York, p. 334, 1965.

(12) J. R. MELCHER et G. I. TAYLOR : Electrodynamics : A review of the role of interfacial shear stresses.
Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 1, p. 111, (1969).

(13) E. J. HOPFINGER et J. P. GOSSE : Charge transport by self-generated turbulence in insulating liquids submitted to unipolar injection.
Phys. Fluids, 12, 2264, (1969).

(14) R. TOBAZEON : Etude du transfert convectif de charges électriques par un jet de liquide isolant et application à la génération de tensions élevées.
(Thèse, Université de Grenoble, 1966).

(15) N. FELICI : Utilisation des liquides fortement polaires comme isolants.
Colloque International sur les phénomènes de conduction dans les diélectriques liquides. (C. N. R. S.),
Grenoble 1968.

(16) P. ATTEN et J. P. GOSSE : Régime transitoire de conduction lors d'une injection unipolaire dans les liquides isolants.
Colloque International sur les phénomènes de conduction dans les diélectriques liquides. (C. N. R. S.);
Grenoble 1968.

(17) R. TOBAZEON : Comportement du nitrobenzène pur sous champs intenses continus et alternatifs.
Colloque International sur les phénomènes de conduction dans les diélectriques liquides. (C. N. R. S.),
Grenoble 1968.

(18) A. CRAYA : Etudes récentes sur le comportement des jets.
Génie Chimique, Vol. 89, p. 33 à 43 et 77 à 87, (1961).

(19) R. CURTET : Sur l'écoulement d'un jet entre parois.
Public Sc. et Techn. Minist. Air, n° 359, (1960).

(20) G. N. KOPYLOV : Laminar flow of a charged liquid through a planar tube under the influence of an external electrostatic field.
Soviet Phys. Techn. Phys. 8, 11, (1964), 962.

(21) L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ : Electrodynamics of continuous media.
Vol. 8, Pergamon Press, (1960).

(22) E. DURAND : Electrostatique
Tome II, Masson et Cie, Paris, (1964).

(23) P. ATTEN et R. MOREAU : Stabilité électrohydrodynamique des liquides isolants soumis à une injection unipolaire.
Journal de Mécanique (Volume 11, n° 3 Septembre 1972).

(24) N. FELICI : Physical Background and Performance of A Supersonic Electro-aerodynamical High Voltage Generator.
Proceedings : International Symposium on electrohydrodynamics M. I. T. March 31, April 1. 2, 1969 p. 151.